

Il materiale che qui proponiamo è stato pensato per organizzare in classe un laboratorio riguardante la geometria sferica e in particolare i triangoli sferici.

Questo stesso laboratorio è stato sperimentato sia nell'ambito dell'attività che il centro *matematita* porta avanti da diversi anni per affiancare l'insegnamento pre-universitario (<http://www.matematita.it/progetti/laboratori.php>), sia in alcune classi di liceo scientifico a Milano nell'ambito del progetto "lauree scientifiche", nell'a.s. 2005-2006.

Sulla base del materiale contenuto in questo *kit* sono possibili diverse scelte e in questa introduzione vengono date alcune indicazioni su come organizzare un percorso laboratoriale completo e su come si possano estrarre alcune proposte più circoscritte.

## PERCHÉ LA GEOMETRIA SFERICA?

La geometria sferica costituisce un argomento di notevole importanza e di naturale interesse, anzitutto perché fornisce una buona descrizione del mondo in cui viviamo. Questo però non è l'unico, e forse nemmeno il principale, motivo per cui abbiamo scelto questo come tema di un laboratorio.

La geometria della sfera è un capitolo bello e ricco di geometria: esso richiede assai pochi prerequisiti, eppure può portare lo studente a fare una vera e propria esperienza di matematica. A partire dall'osservazione di semplici fatti sperimentali, lo studente può intuire, congetturare e in al-

cuni casi anche dimostrare, risultati importanti e inaspettati di geometria non euclidea, quali quelli che riguardano la somma degli angoli interni di un triangolo, o il rapporto tra l'eccesso sferico e l'area dei triangoli, o ancora le mutue proprietà di incidenza di rette sulla sfera.

Nelle schede di lavoro contenute nel CD-rom che accompagna questo fascicolo i concetti di geometria sferica sono quasi sempre introdotti a partire dalle analoghe nozioni di geometria euclidea e, in ogni caso, sono continui i rimandi dall'uno all'altro contesto: questo da un lato può fornire all'insegnante il pretesto per un ripasso con modalità laboratoriale di alcuni capitoli della geometria euclidea, dall'altro è da stimolo per gli studenti affinché siano essi stessi a proporre le nuove definizioni per analogia con quelle già note. Le osservazioni fatte sulla sfera possono inoltre fornire lo spunto per avviare gli studenti allo studio delle geometrie non euclidee.

Il fatto che il tema della geometria sferica sia in genere poco affrontato nella scuola superiore ci sembra che possa portare dei vantaggi. Ci pare cioè che, al fine di incuriosire i ragazzi sui metodi e sui risultati della matematica, possa essere utile presentare temi in qualche modo svincolati dal programma scolastico. Questo anche perché proprio il fatto che si tratti di un argomento "extra" rispetto al normale curriculum presenta il vantaggio di togliere ai ragazzi la paura relativa alla necessità di prerequisiti e di far loro affrontare i problemi nello spirito del laboratorio: una cooperazione per una ricerca comune.

Si tratta infine di un argomento che si presta molto bene a essere trattato in laboratorio, anche grazie agli ottimi materiali che si hanno a disposizione, quali le Sfere di Lénárt (*Lénárt Sphere*).

### I CONTENUTI

Il laboratorio verte sui concetti di punti, “rette” e “angoli” nella geometria sferica, sulle proprietà dei triangoli sferici e affronta inoltre la questione della posizione reciproca di due “rette” su una sfera, in particolare la non validità del V postulato di Euclide.

Nelle schede sono previste attività prevalentemente sperimentali e le giustificazioni richieste agli studenti dei vari fenomeni osservati sono solo di tipo euristico.

Fa eccezione la scheda dal titolo “Rette sulla sfera: alcune dimostrazioni”, che è di natura prettamente teorica poiché contiene un’attività di tipo dimostrativo. Tuttavia anche in questo caso può essere di grande aiuto la manipolazione del materiale a disposizione.

### I METODI

Tutto il materiale è organizzato in schede di lavoro (di cui si può trovare l’impaginato da stampare e distribuire ai ragazzi nel CD-rom allegato); per ciascuna di queste è predisposta anche una presentazione per gli insegnanti, contenuta in questo fascicolo, comprendente soluzioni e commenti.

Le schede di laboratorio sono state progettate per essere utilizzate dagli studenti suddivisi in piccoli gruppi, in modo da favorire un atteggiamento

attivo di “ricerca” rispetto ai problemi proposti, un interscambio delle idee, degli errori, delle scoperte. Ognuna di esse prevede degli spazi bianchi in cui scrivere le risposte ai diversi quesiti; ben sappiamo che la rielaborazione e la scrittura di ciò che si è “scoperto” o intuito è una fase di lavoro non semplice che i ragazzi tendono a rifiutare! È peraltro indispensabile non saltarle ma utilizzarle sia come momento di confronto all’interno del gruppo (prima di scrivere una risposta infatti vanno confrontate le diverse soluzioni, in modo da arrivare a una risposta condivisa dai vari membri del gruppo) sia per agevolare il confronto tra le risposte ai quesiti fornite dai diversi gruppi, in una discussione finale collettiva con l’intera classe.

Spesso i problemi richiedono di costruire qualcosa, con fili, materiale adesivo, o con il materiale *ad hoc* fornito in questo *kit*; in questo caso occorre sempre curare un rapporto equilibrato tra il momento concreto della costruzione e la successiva formalizzazione astratta di quanto si osserva. Da un lato quindi vanno stimolati i ragazzi a non “snobbare” l’aiuto effettivo che può venire all’intuizione dalla manipolazione di oggetti (anche se, in genere, non c’è bisogno di questo stimolo, perché i ragazzi tendono ad accogliere con entusiasmo questa possibilità); dall’altro vanno frenati affinché non ripongano una fiducia cieca in questi supporti: il che significa contribuire ad affinare sia le proprie capacità di immaginazione (cercando quindi sempre di “prevedere” il risultato di una costruzione prima di realizzarla effetti-

vamente), sia le proprie capacità di astrazione, che permettono dall'osservazione di alcuni fenomeni di arrivare a ipotizzare (e magari poi a dimostrare) un risultato valido in generale.

### IL MATERIALE A DISPOSIZIONE

Il *kit* che presentiamo con questo quaderno comprende:

- 5 Sfere di Lénárt con calotte intercambiabili e lavabili, complete di squadra, compasso e goniometro sferici, e istruzioni per l'uso;
- 6 caleidoscopi (2 blu, 2 rossi e 2 gialli);
- 5 coppie di specchi piani;
- *kit* per costruire 4 diverse triangolazioni della sfera;
- materiale adesivo;
- un poster (50x70);
- un CD-rom da cui l'insegnante può estrarre le schede di laboratorio da stampare e distribuire ai ragazzi e le immagini delle sfere necessarie per le attività della scheda B;
- 1 copia plastificata delle schede A, B, C e D.

Nella presentazione per l'insegnante delle diverse schede di laboratorio verrà di volta in volta specificato se è necessario altro materiale di uso comune (carta, fili elastici, ...) che è opportuno avere a portata di mano e mettere a disposizione dei ragazzi per il singolo problema discusso.

### I POSSIBILI PERCORSI: ORGANIZZAZIONE E TEMPI

Le schede di laboratorio sono quattro e si troveranno di seguito commentate. Esse sono:

- A. Rette, semipiani e angoli
- B. Caleidoscopi e triangoli sferici
- C. Triangoli sferici: alcune proprietà
- D. Rette sulla sfera: alcune dimostrazioni.

In particolare segnaliamo che la scheda A contiene le definizioni di punti, "rette" e "angoli" nella geometria sferica, per cui consigliamo di non prescindere da questa quando si propone il laboratorio agli studenti. L'insegnante può scegliere per l'incontro successivo una delle schede rimanenti e organizzare il percorso che preferisce. In particolare, le schede A, B e C costituiscono un percorso completo sul tema dei triangoli sferici; la scheda D è di natura diversa dalle altre poiché contiene attività di tipo dimostrativo, come già dichiarato; essa può essere omessa, o rinviata a un lavoro in tempi successivi (ad esempio qualora si voglia introdurre il problema del V postulato).

Le schede A, B, C e D corrispondono a un percorso di 8 ore effettivamente sperimentato nella sua totalità nelle classi terze e quarte di alcuni licei scientifici di Milano, nell'ambito del progetto lauree scientifiche. Parti di questo percorso sono state sperimentate, inoltre, in questa forma o in forme lievemente diverse, nei laboratori per le scuole offerti dal centro *matematita* presso il Dipartimento di Matematica "F. Enriques" dell'Università degli Studi di Milano.

All'interno del *kit* si trova anche del materiale per realizzare quattro triangolazioni della sfera, 3 delle quali raffigurate nel poster. L'insegnante può decidere di condurre il laboratorio fino in

fondo, lasciando come attività conclusiva quella della costruzione di queste triangolazioni; oppure può decidere, viceversa, di partire proprio da questa, sfruttando così anche il nuovo materiale prodotto per la risoluzione dei problemi proposti. Avvisiamo comunque che la costruzione delle sfere tramite le fustelle di cartoncino può risultare un po' dispendiosa in termini di tempo.

Il materiale è stato pensato per un triennio di scuola secondaria superiore. Tuttavia, proprio la mancanza di specifici prerequisiti a cui già si è fatto riferimento fa sì che il materiale sia utilizzabile anche in classi del biennio (e parti di esso sono state effettivamente sperimentate sia al biennio, sia anche, con diversa formulazione, con classi di scuola media): la differenza in questi casi consiste essenzialmente nel livello di rigore e di consequenzialità che l'insegnante potrà richiedere, nei singoli problemi, come giustificazione delle argomentazioni fatte: è ragionevole pensare che queste si limiteranno a un livello osservativo nella scuola media, per arrivare a livelli via via più consapevoli e razionali con i ragazzi più grandi.

Per finire vi invitiamo a utilizzare il sito [www.matematita.it/materiale](http://www.matematita.it/materiale), dove si può trovare una grossa raccolta di immagini e animazioni; in particolare alla pagina <http://www.matematita.it/materiale/catalogo.php?parent=710> si trovano immagini che hanno a che vedere con la geometria sferica, mentre dalla pagina <http://www.matematita.it/materiale/animazioni/vedi11/> si può scaricare un'animazione che

riguarda le triangolazioni della sfera illustrate nel poster "**Dalla sfera ai poliedri regolari**".

Potrete anche segnalare osservazioni, commenti e quant'altro nel forum aperto alla pagina <http://www.matematita.it/forum> che potrà essere un utile strumento di confronto tra gli utilizzatori di questo *kit*.