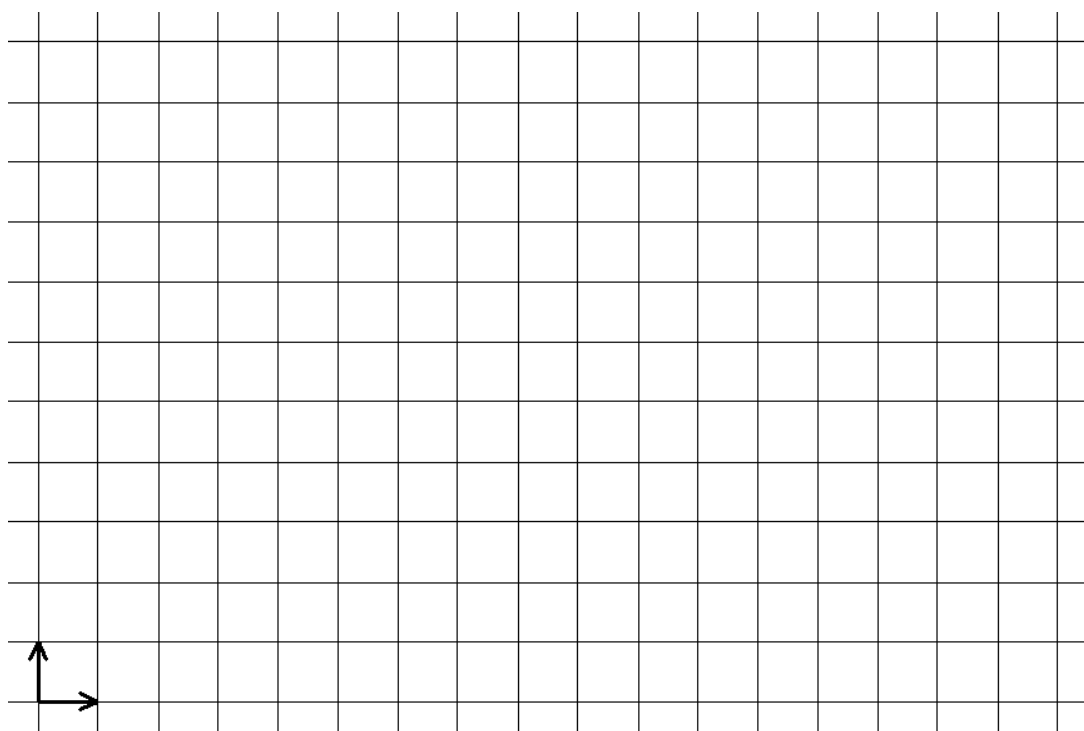


I MOSAICI E IL CONCETTO DI GRUPPO (triennio sc.sec II grado)

Qui sotto avete una griglia, che rappresenta una normale quadrettatura, come quella dei quaderni a quadretti; nelle attività che seguono dovrete immaginare che si estenda al di fuori del foglio, all'infinito, ripetendosi sempre uguale:



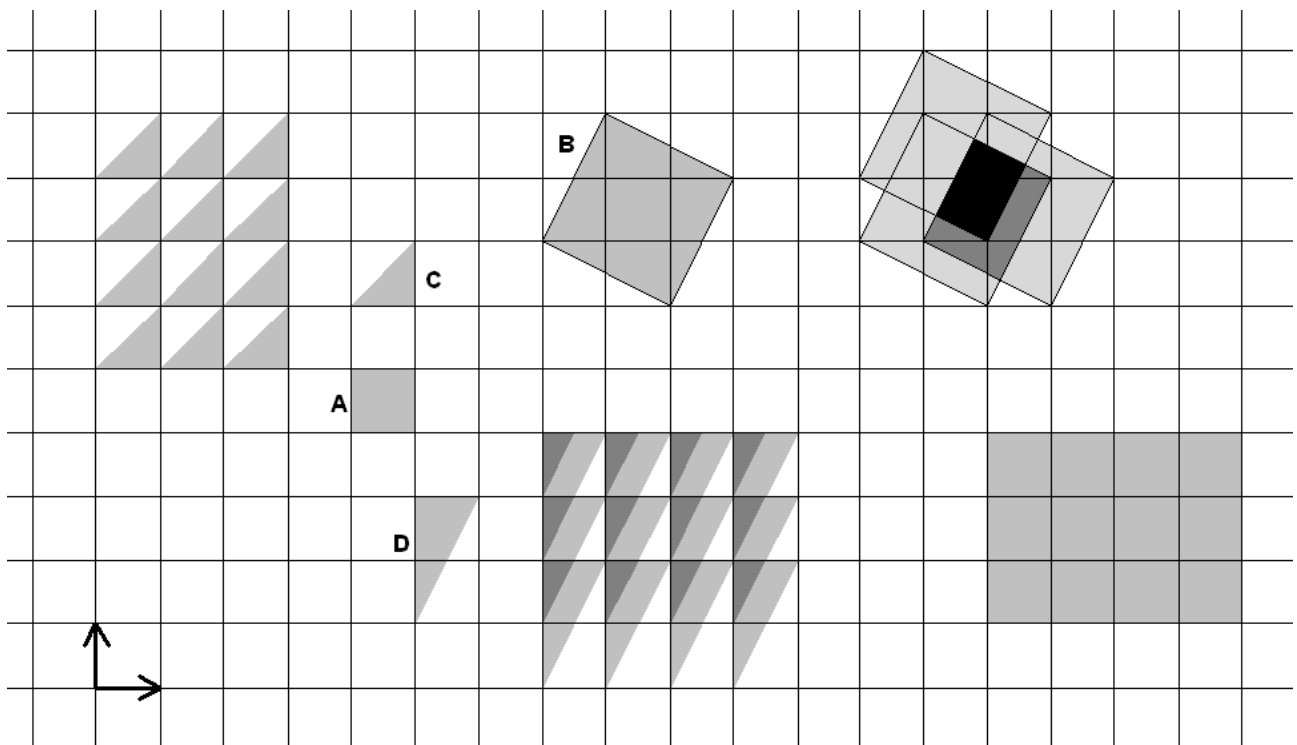
In basso a sinistra sono segnate due frecce (due vettori); immaginate di chiudere gli occhi e che un vostro compagno muova la griglia con la traslazione corrispondente a uno di questi due vettori (cioè ogni punto P va a finire in un punto P' tale che il vettore PP' abbia la stessa lunghezza, lo stesso verso e la stessa direzione del vettore corrispondente a una delle due frecce in figura): quando riaprite gli occhi non ve ne riaccorgeteste.

In realtà questo non è del tutto vero se pensiamo al disegno qui sopra perché vedreste mutata la posizione del bordo della griglia rispetto al foglio. Però noi dobbiamo immaginare la griglia illimitata, in tutte le direzioni, e quindi senza un "bordo" dove "finisce": e in questo caso proprio non ve ne accorgeteste.

Quali altri vettori, oltre a quelli individuati da un lato di un quadretto, corrispondono a traslazioni che non cambiano la griglia? Disegnatene (almeno) tre sulla griglia qui sopra.

Chiamiamo **MOSSA LEGITTIMA DI TIPO I** qualunque traslazione che ottenete componendo come volete le due traslazioni corrispondenti ai vettori segnati nell'angolo in basso a sinistra della quadrettatura. Per esempio, è una **MOSSA LEGITTIMA DI TIPO I** spostare la griglia di 3 quadretti verso l'alto e di 5 verso sinistra.

Consideriamo ora delle figure sulla griglia, come quelle qui sotto, e immaginiamo di applicare a una di queste forme **tutte** le possibili **MOSSA LEGITTIME DI TIPO I**; cosa succede?



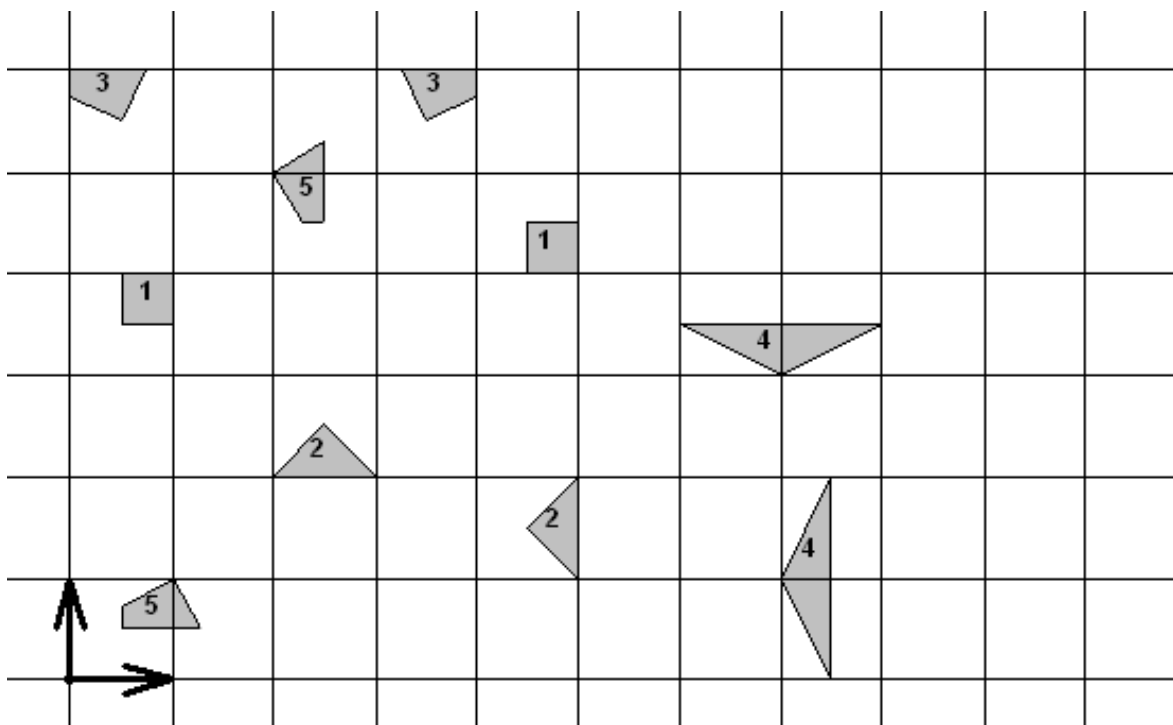
Otteniamo una famiglia di forme, tutte uguali fra loro, e possono succedere cose diverse, ad esempio:

- A. queste forme ricoprono esattamente tutto il piano, senza sovrapposizioni e senza buchi (un esempio è il quadrato A in figura);
- B. le forme ricoprono tutto il piano, ma si accavallano (un esempio è il quadrato B);
- C. le forme non si accavallano, ma lasciano dei buchi (un esempio è il triangolo C);
- D. le forme si accavallano in parte, ma lasciano anche dei buchi (un esempio è il triangolo D).

In quanto segue ci interesseranno particolarmente le forme che si comportano come l'esempio del quadrato A qui sopra. Le chiameremo forme di tipo A.

Non ci sono solo le traslazioni che fissano la quadrettatura, ma anche per esempio le rotazioni: allarghiamo allora il parco delle MOSSE LEGITTIME aggiungendo le rotazioni di 90° intorno ai vertici della quadrettatura, le rotazioni di 90° intorno ai centri dei quadretti e le rotazioni di 180° intorno ai punti medi dei lati dei quadretti (ATTENZIONE: verificate che ciascuna di queste trasformazioni non cambia l'aspetto della griglia!). Una MOSSA LEGITTIMA DI TIPO II è allora una qualunque combinazione delle traslazioni, che abbiamo messo in evidenza fra le mosse di tipo I, e di queste rotazioni.

Nella prossima griglia trovate altre forme e vi porremo le stesse domande di prima rispetto alle MOSSE LEGITTIME DI TIPO II.

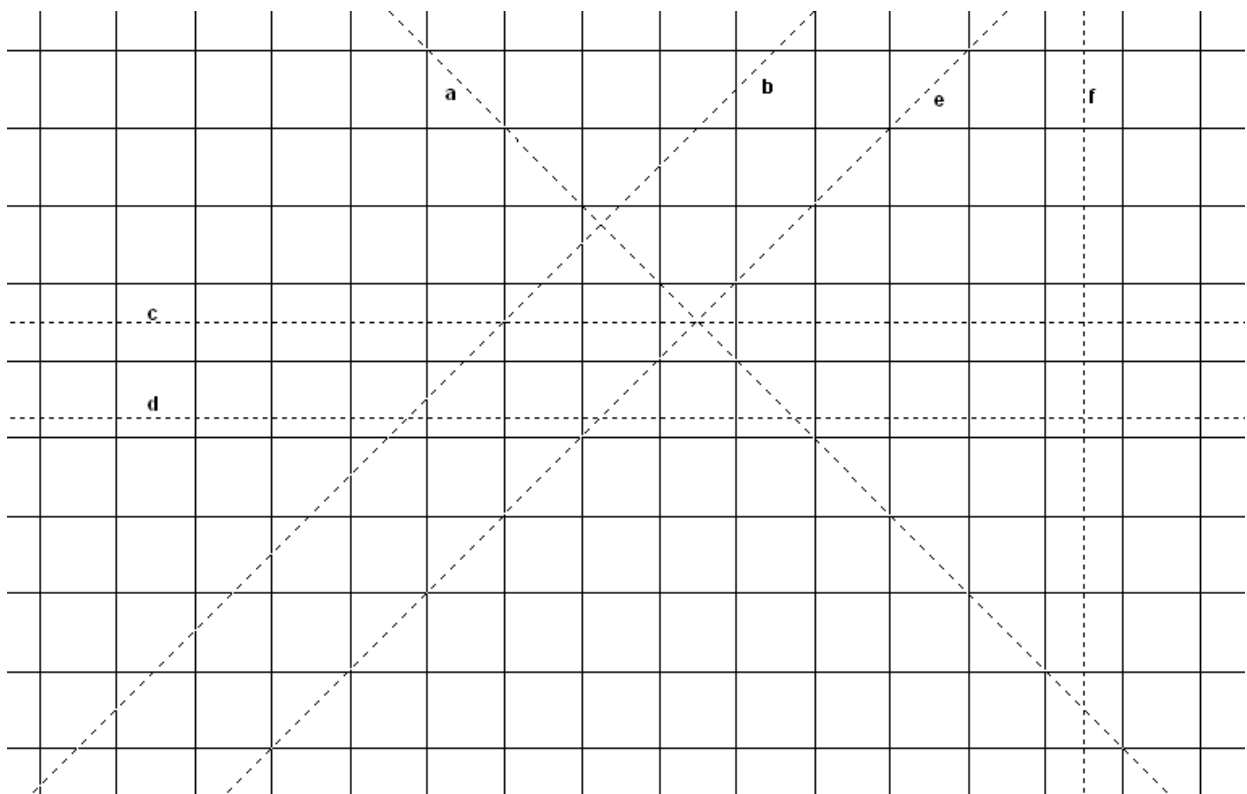


- ogni figura è ripetuta due volte: c'è una MOSSA LEGITTIMA DI TIPO II che manda l'una nell'altra le due figure?

	1	2	3	4	5			
SÌ								
NO								

- quasi tutte le figure sono di tipo A (rispetto alle MOSSE LEGITTIME DI TIPO II), ovvero la famiglia delle figure ottenute applicando a una di queste tutte le MOSSE LEGITTIME DI TIPO II ricopre il piano senza sovrapposizioni e senza buchi. Una sola fra le cinque figure non è di tipo A: quale?

In realtà non ci sono solo traslazioni e rotazioni che fissano la griglia, ma anche altre trasformazioni. Per esempio, le rette della quadrettatura sono assi di simmetria della griglia: ciò vuol dire che la riflessione rispetto a una di queste rette manda la griglia in se stessa; ovvero (ed è un altro modo di dire la stessa cosa) se appoggiamo uno specchio a una di queste rette, perpendicolarmente al piano che contiene il disegno, vediamo nello specchio un'immagine virtuale che riproduce esattamente la metà del disegno nascosta dallo specchio stesso.



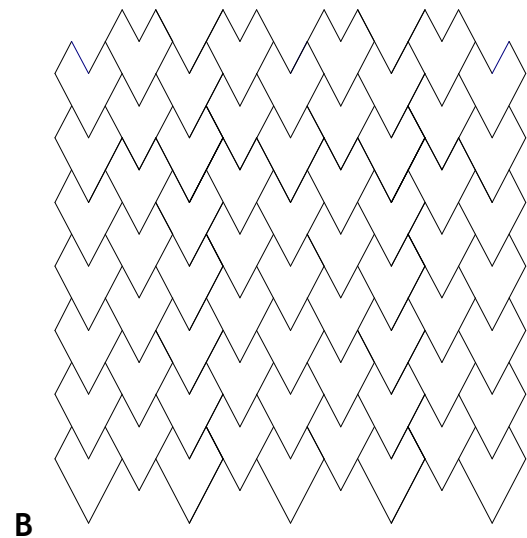
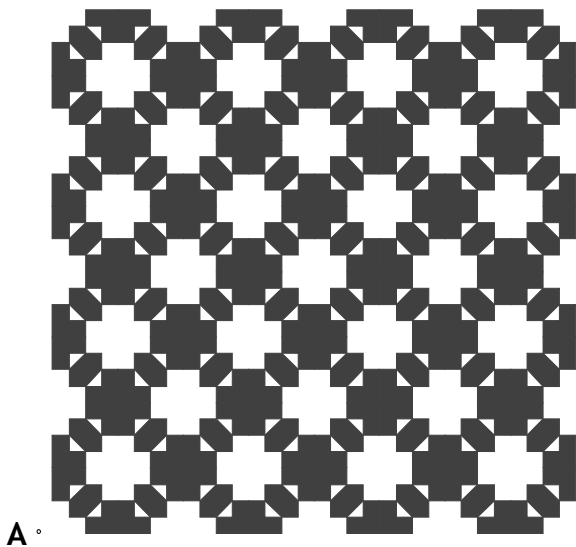
Le rette della quadrettatura non sono i soli assi di simmetria della griglia: quali altre rette lo sono? Ad esempio, le rette tratteggiate in figura sono assi di simmetria della griglia?

	a	b	c	d	e	f
SI						
NO						

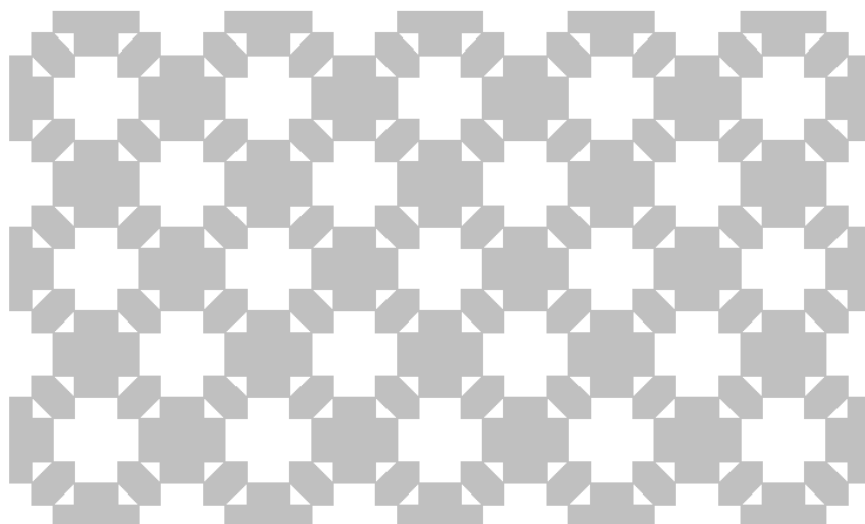
Quelli che in matematica si chiamano “mosaici” sono delle figure piane che (come la griglia quadrettata che abbiamo esaminato) non cambiano rispetto a due traslazioni, in due direzioni diverse. Si tratta quindi sempre di figure che dobbiamo immaginare illimitate (cioè che “continuano” al di là del foglio o dello schermo su cui sono disegnate). Per distinguere fra queste figure si può studiare quali altre trasformazioni ci sono (oltre alle traslazioni) che non mutano il loro aspetto, come abbiamo fatto per la carta a quadretti.

Chiameremo “uguali” due mosaici per i quali è identico lo schema di tutte le trasformazioni che li fissano e “diversi” quelli per cui questi due schemi sono diversi.

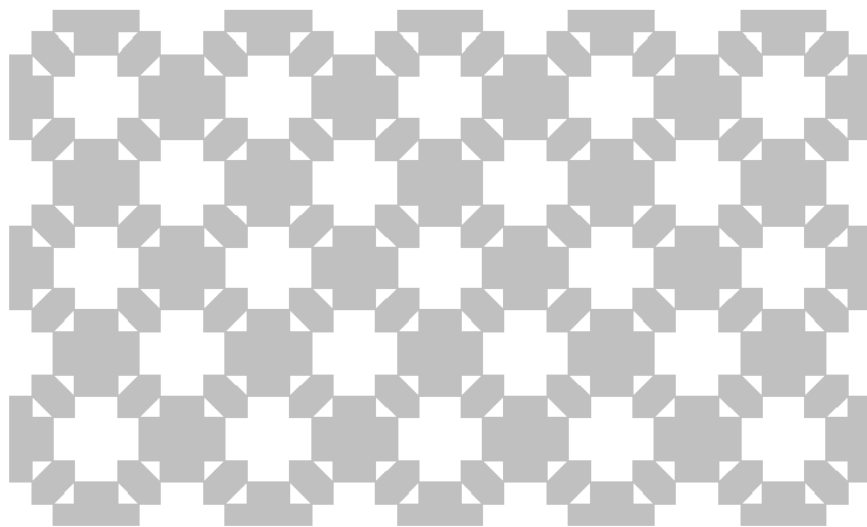
Ad esempio, dei due mosaici A e B qui sotto, solo A è “uguale” alla carta a quadretti da questo punto di vista. Vediamo nel dettaglio perché:



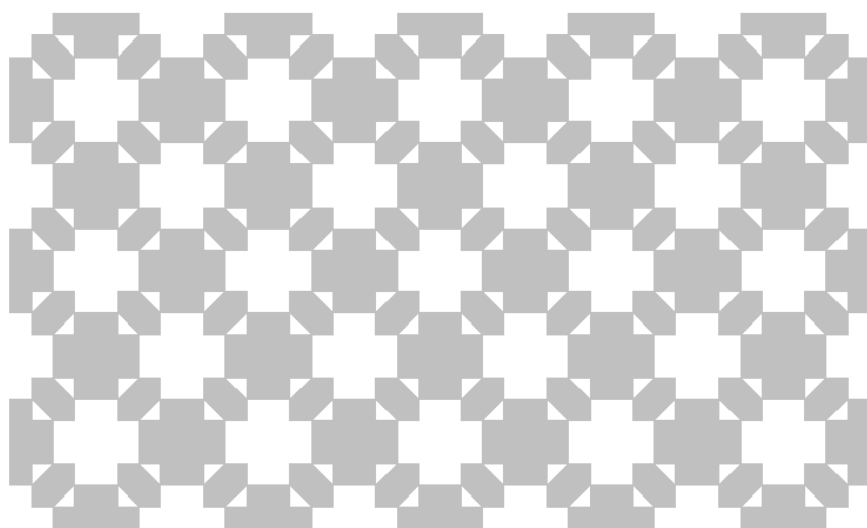
Nella carta a quadretti abbiamo trovato rotazioni di 90° : dove sono ubicati i centri di rotazione di 90° sul mosaico A? (potete segnarli sulla figura qui sotto)



Nella carta a quadretti abbiamo trovato dei punti che erano centri di rotazione per una rotazione di 180° , ma non per una di 90° : dove sono ubicati i centri corrispondenti sul mosaico A?



Nella carta a quadretti abbiamo trovato degli assi di simmetria, e ne abbiamo trovati in 4 direzioni diverse: come sono situati gli assi di simmetria rispetto al mosaico A?



E per quello che riguarda il mosaico B, che abbiamo asserito essere “diverso” dalla carta a quadretti, sapreste dare (almeno) una motivazione che ci garantisca che i due schemi sono davvero differenti?

.....

.....

.....

.....

Volendo continuare questa operazione di “mettere in ordine” i mosaici, dal punto di vista della simmetria, i casi che si incontrano sono esattamente 17, e, nella prossima attività, esaminiamo 4 di questi 17 casi.

I quattro casi corrispondono a questi quattro simboli (che noi qua useremo semplicemente come un nome):

22x

442

*442

4*2

Avete a disposizione quattro disegni (che, se ne immaginate la continuazione, costituiscono dei mosaici) estratti tutti dalla medesima fotografia, usando l’animazione “Generatore di mosaici” del DVD “Simetria”.¹

Per ciascuno dei quattro disegni, rispondete alle seguenti domande:

A. c’è una rotazione di 90° che non muta l’aspetto del disegno?

Rotazioni di 90°	sì	no

B. ci sono assi di simmetria, ovvero rette tali che la riflessione rispetto a questa retta non muta l’aspetto del disegno? (usate eventualmente uno specchio per verificarlo)

Assi	sì	no

C. Nei disegni per i quali la risposta alla domanda 2. è sì, in quante diverse direzioni trovate un asse di simmetria?

¹ Non si tratta di un errore di stampa! Questo DVD è stato realizzato da un’associazione portoghese e in portoghese si dice “Simetria”, con una sola “m”...

Quante direzioni?	1	2	3	4	più di 4

D. Se le risposte alle domande 1 e 2 sono due sì, cosa potete dire della posizione dei centri di rotazione rispetto agli assi di simmetria? È vero che tutti i centri di rotazione sono ubicati su un asse di simmetria?

Centri di rotazione sugli assi?	sì	no

Avete anche a disposizione una camera quadrata di specchi e dei disegni che rappresentano un modulo quadrato estratto dai mosaici che state studiando (i moduli sono sei, perché in alcuni casi avete due possibilità per lo stesso disegno).

E. è possibile ricostruire il disegno nella camera quadrata di specchi? Ovvero: ciò che si vede nella camera disponendo il modulo all'interno è esattamente il mosaico da cui siete partiti?

Si ricostruisce in una camera di specchi?	sì	no

Registrate nella prossima tabella le vostre risposte a tutte le domande, per ciascuno dei 4 disegni:

	rotazioni di 90° (sì/no)	Specchi (sì/no)	Specchi (quante direzioni)	Centri di rotazione sugli assi?	Si ricostruisce in una camera di specchi?

Confrontate questa tabella con quella che vi diamo qui sotto e che vi dice come si comportano rispetto a queste domande i quattro tipi di simmetria che stiamo analizzando:

	rotazioni di 90° (sì/no)	Specchi (sì/no)	Specchi (quante direzioni)	Centri di rotazione sugli assi?	Si ricostruisce in una camera di specchi?
442	sì	no	//////////	//////////	no
*442	sì	sì	4	sì	sì
4*2	sì	sì	2	no	sì
22x	no	no	//////////	//////////	no

Dal confronto fra queste due tabelle potete classificare i quattro disegni:

- Il disegno è un
- Il disegno è un
- Il disegno è un
- Il disegno è un

C'è qualche domanda che era inutile, al fine di distinguere i 4 disegni? Se sì, quale/i e perché?

.....

.....

.....

.....

Se volete, potete confrontare la vostra quaterna con quelle analizzate dai vostri compagni.