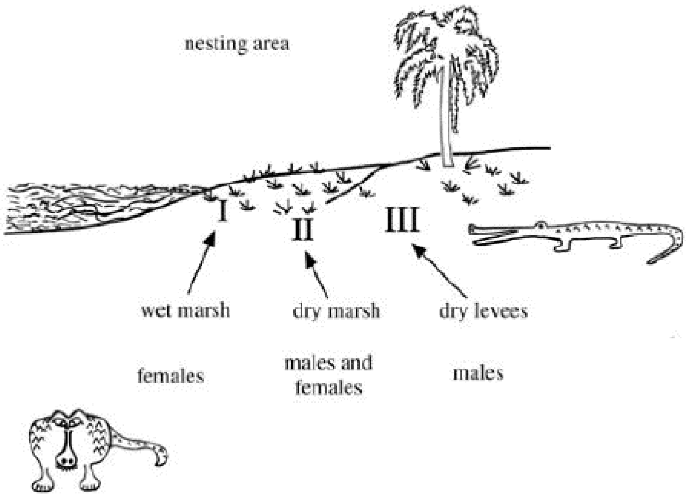
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI MILANO

Corso di Perfezionamento in

"Tecniche e didattica laboratoriali"



Docente: Prof. Giovanni Naldi

Anno Accademico 2008-2009

Relazione finale di

Eugenio Tufino

Indice

Introduzione

In questa relazione è riportata l'attività svolta nel corso di perfezionamento in 'Tecniche didattiche' dell'Università di Milano seguito dal Ottobre 2008 al Giugno 2009. Tra i laboratori proposti ho scelto i seguenti:

- Laboratorio di Crittografia a cura del prof. O.Rizzo, Università di Milano
- Laboratorio di Biomatematica a cura del prof. G.Naldi (Università di Milano)

Laboratorio di Crittografia

L'attività di preparazione è consistita nello studio del materiale da presentare nelle classi, dopo averne concordato il contenuto in alcuni incontri introduttivi con il prof. O. Rizzo. Mi sono interessato particolarmente all'utilizzo dei grafi come esempio di crittografia a chiave pubblica (Tale metodo viene chiamato Codice perfetto a chiave pubblica).
Tale approccio è didatticamente molto efficace. Una volta che i grafi sono stati forniti agli studenti, la strategia di soluzione è semplice poiché consiste di addizioni (modulo n). La decrittazione del messaggio inoltre fornisce quella dimensione ludica che rende il laboratorio accattivante per gli studenti.

Ho costruito alcuni grafi a partire da un sottoinsieme di punti chiamato "codice perfetto". Il "codice perfetto" è l'equivalente della chiave privata in un sistema di crittografia a chiave pubblica.

La realizzazione di grafi dal codice perfetto ha preso una notevole quantità di tempo. Occorreva costruire grafi non troppo banali ma neanche troppo difficili per evitare che gli studenti si scoraggiassero.

La sperimentazione del laboratorio di crittografia è avvenuta in tre differenti contesti:

1) Liceo Scientifico 'Vico' di Corsico dove ho assistito il prof. Rizzo nella presentazione del laboratorio a una settantina di studenti divisi in due gruppi. Abbiamo gestito i gruppi in parallelo per la parte dei grafi.

2) Liceo Scientifico 'Primo Levi' di San Donato, dove ho assistito in due incontri il prof. Rizzo per la presentazione a una classe seconda della crittografia tramite grafi.

3) Liceo Scientifico 'Italo Calvino' di Rozzano. Ho presentato il laboratorio di crittografia a una classe Seconda e Prima. Non mi sono limitato alla parte sui grafi ma ho presentato anche il rimanente materiale in accordo al seguente schema presentato preventivamente agli studenti.

Crittografia I Parte (2 ore)

1. Introduzione alla crittografia. La tipica situazione che la crittografia cerca di risolvere attraverso metodi matematici è la seguente: una persona A deve far arrivare un messaggio dal contenuto riservato a una persona B, e teme che una terza persona C lo possa intercettare.
2. Presentazione di metodi crittografici sotto forma di giochi (utilizzando una moneta, due monete, tre carte, etc.)
3. Problemi facili / difficili in matematica
4. Teoria dei grafi attraverso semplici esempi
5. Utilizzare i grafi per trasmettere informazioni segretamente. Gli studenti in gruppi di tre proveranno a trasmettere e decifrare i messaggi utilizzando i grafi preparati dal docente

Crittografia II Parte (2 ore)

1. Aritmetica modulare (o aritmetica dell'orologio)
2. Il cifrario di Cesare
3. Decifrare dei messaggi cifrati con ruote di carta costruite appositamente

Infine, con il materiale preparato ed utilizzato sulla crittografia con i grafi si è preparata una "Guida per l'insegnante".

Laboratorio di Biomatematica

Il Laboratorio di Biomatematica è coordinato dal prof. G.Naldi del Dipartimento di Matematica dell'Università di Milano.

Il prof. Naldi ha esposto a me e altri docenti interessati l'argomento del Laboratorio in un incontro dedicato, fornendo poi del materiale di approfondimento.

Successivamente il laboratorio è stato tenuto presso il Liceo Scientifico "Italo Calvino" di Rozzano dal prof. Davide Ambrosi del Politecnico di Milano con l'assistenza di un dottorando.

Il laboratorio è stato proposto in orario pomeridiano agli studenti più motivati di due classe Quarte. Dodici studenti hanno aderito e partecipato al progetto. Si è trattato di tre incontri della durata di due ore e mezza circa ciascuno.

Il primo incontro è cominciato illustrando una presentazione del prof. Naldi sui modelli matematici e sulle loro applicazioni alla biologia. [G. Naldi1] [Comincioli]

In aggiunta a questi tre incontri, ci sono stati due incontri tenuti da me: nel primo, propedeutico al laboratorio con il docente, ho introdotto l'utilizzo di Excel e la trattazione dei casi più semplici di crescita di popolazioni e nell'ultimo si è trattato nel dettaglio il modello di crescita demografica dei coccodrilli esposto nel prossimo capitolo.

Come attività di preparazione e approfondimento ho seguito il Laboratorio di biomatematica condotto dal prof. Naldi e rivolto agli studenti del Liceo "Volta" di Milano in tre incontri dedicati, di cui gli ultimi due tenutisi nel laboratorio di informatica dell'Università di Milano.

Laboratorio di Biomatematica

Introduzione

Nel laboratorio si è introdotto un sistema dinamico discreto descritto dalla seguente equazione:

$$N_{t+1} = f(N_t)$$

Dove N_t è la densità della popolazione al tempo t ed f è una funzione opportuna.

Lo strumento principale utilizzato per trattare questi sistemi è la successione definita per ricorrenza (argomento introdotto agli studenti nella lezione preliminare tenuta da me).

Si è svolta una sperimentazione delle principali caratteristiche di questo sistema attraverso l'utilizzo di Excel.

In questo problema la variabile tempo t è discreta e si indica con $N(t=0)=N_0$ la popolazione all'istante iniziale.

Negli esempi che seguono analizziamo i casi corrispondenti alla equazione:

$N_{t+1}=\lambda N_t$

Come esercizio si è dimostrato che tale equazione è equivalente a: $N_t=\lambda^t N_0$

Esempio 1

Andamento demografico di una colonia di conigli.
Siano α e β i tassi di natalità e mortalità. In particolare supponiamo che il tasso di natalità α rappresenti quanti conigli nascano da ogni femmina di conigli. Si ottiene allora la seguente equazione:

$$N_{t+1} - N_t + \frac{\alpha}{2} N_t - \beta N_t$$

Questa si può riscrivere nel seguente modo: $N_{t+1} = N_t\left(1 + \frac{\alpha}{2} - \beta\right)$

Matematicamente possiamo osservare che:

1. Se $\frac{\alpha}{2}-\beta>0$ la popolazione cresce esponenzialmente
2. Se $\frac{\alpha}{2}-\beta<0$ la popolazione decresce esponenzialmente
3. Se $\frac{\alpha}{2}-\beta=0$ la popolazione rimane costante

Gli studenti hanno verificato questo comportamento al variare di α e β utilizzando Excel.

In questo esempio occorre fare attenzione alla scelta dei valori di α e β per evitare valori negativi della popolazione.

Abbiamo mostrato agli studenti come ricavare le condizione da ricercare per evitare valori negativi. Si riscrive l'equazione di partenza considerando l'intervallo discreto di tempo Δt:

$$\frac{N_{t+1}-N_t}{\Delta t}=\alpha N_t-\beta N_t$$

$$N_{t+1}=N_t+\Delta t\cdot(\alpha-\beta)N_t>0$$

Essendo Δt<1, si ottiene la seguente condizione:

$$\frac{1}{\Delta t}>\beta-\alpha$$

Esempio 2

Si è introdotto poi un modello più complicato per tenere conto del fatto che le risorse di cibo possano essere limitate oppure del fatto che all'aumentare del numero dei conigli il tasso di mortalità aumenta.

La legge diviene: $N_{t+1}=N_t+\frac{\alpha}{2}N_t-\beta N_t^2$

Approfondimento sulla mappa logistica

Un argomento interessante è l'introduzione della mappa logistica discreta, che si può ottenere a partire da una variante dell'equazione dell'esempio 2. Non abbiamo discusso questa equazione nel nostro laboratorio; essa è stata invece proposta dal prof. Naldi nel laboratorio con gli studenti del Liceo 'Volta'. Il termine 'logistica' è stato introdotto da Verhulst nel ' 600 per la descrizione della crescita di una popolazione. In laboratorio si è studiata la stabilità dei punti fissi della mappa logistica e si è utilizzato Excel per studiarne la dinamica. La maggior parte degli studenti è riuscita a fare l'analisi richiesta. E' un esempio interessante anche perché consente di introdurre un primo tipo di sistema che presenta un caos deterministico. [May]

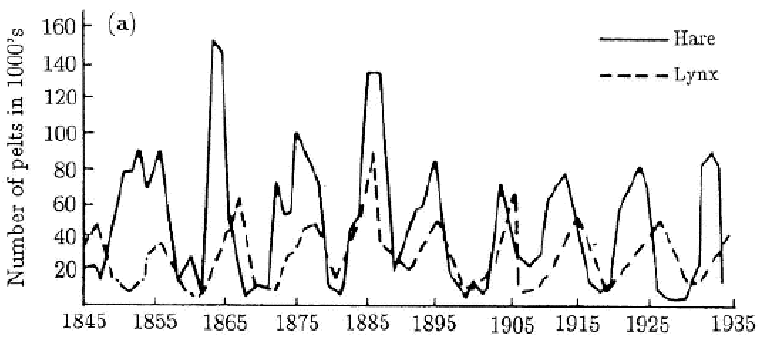
Esempio con due popolazioni - Preda /Predatori

Successivamente si è introdotto un modello Ospite/Parassita o Preda/Predatore, in cui ci sono quindi due popolazioni interagenti a tempi discreti. Il modello originale prevede l'utilizzo di equazioni differenziali, agli studenti si è presentato il modello in tempi discreti e si è accennato alla genesi di questo modello (denominato come modello Lotka-Volterra) da parte di Volterra negli anni Venti per comprendere l'andamento di due popolazioni di pesci nell'Adriatico.

Le ipotesi di base sono le seguenti:

1. Le prede in assenza dei predatori seguono una dinamica che dipende dalla densità, il comportamento è cioè quello di singola popolazione.
2. L'Effetto dei predatori è di ridurre il tasso di crescita della prede per un termine proporzionale alle popolazioni di prede e predatori
3. In assenza di cibo(prede) il predatore si estingue

Un andamento tipo è il seguente, che si riferisce a due popolazioni di linci e lepri.



Il modello studiato dagli studenti, con X e Y che indicano le due popolazioni è il seguente:

$$\frac{dX}{dt} = X(c - d \cdot X - p_1 Y)$$

$$\frac{dY}{dt} = Y(-m + p_2 X)$$

Che per tempi discreti divengono:

$$X_{n+1} = X_n + \Delta t \cdot X_n(c - d \cdot X_n - p_1 Y_n)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \Delta t \cdot Y_n(-m + p_2 X_n)$$

I valori dei parametri utilizzati in laboratorio sono stati i seguenti:

c tasso di crescita delle prede; c=0.25

m mortalità dei predatori m=0.10

d effetto della densità, d=0.1

p_1,p_2 effetto delle prede sui predatori /predatori sulle prede: 0.2,0.1

passo temporale Δt=0.5; stato iniziale X_0=1, Y_0=0.1

Nel modello originario di Volterra il termine di interazione è uguale per preda /predatore, p1=p2 e d=0.

Gli studenti hanno potuto verificare al variare dei parametri che esistono tre stati di equilibrio del sistema: 1) Estinzione predatori 2) Estinzione preda 3) Coesistenza.

Inoltre, hanno calcolato i punti di equilibrio del sistema anche per via algebrica a partire dalle equazioni. Alcuni hanno disegnato l'andamento della popolazione attraverso il grafico nello spazio delle fasi (X,Y).

Studio del meccanismo di concepimento dei coccodrilli

Come applicazione più complessa dei modelli considerati fino ad ora si è scelto di analizzare con gli studenti il meccanismo di concepimento dei coccodrilli. [G. Naldi], [Murray]

Ho svolto questo modello in un incontro di due ore tenutosi con gli studenti a Maggio.

Il fenomeno da analizzare è il seguente: nei coccodrilli il sesso del nascituro non è determinato geneticamente ma dipende dalla temperatura a cui si sono sviluppate le uova. Ad una maggiore temperatura è associata una probabilità più alta di avere un nascituro di sesso maschile. In inglese tale meccanismo viene denominato 'Temperature-dependent sex determination' (acronimo TSD).

Si vuole verificare se questo modello comporta dei vantaggi evolutivi rispetto ad un modello in cui il sesso dei nascituri viene determinato in maniera genetica, con metà dei nati di sesso maschile e metà di sesso femminile. A tale modello ci si riferisce con 'Genetic dependent sex- determination' (acronimo GSD) [Murray] . Questo offre anche l'occasione di menzionare la Teoria di Darwin che gli studenti conoscono dagli studi di biologia.

Consideriamo l'ambiente suddiviso in due zone: una zona umida e fresca ed una zona calda e secca. Nelle zone umide i nuovi nati saranno prevalentemente femmine, nelle zone calde i nuovi nati saranno prevalentemente maschi.

I parametri che intervengono nel modello sono i seguenti:

- β: tasso di natalità, rappresenta il numero medio netto di nati da ciascuna nidiata
- δ: tasso di mortalità
- k_1: numero di nidi disponibili nelle zone umide e fresche
- k_2: numero di nidi disponibili nelle zone calde e secche
- $k = k_1 + k_2$ è il numero totale di nidi disponibili

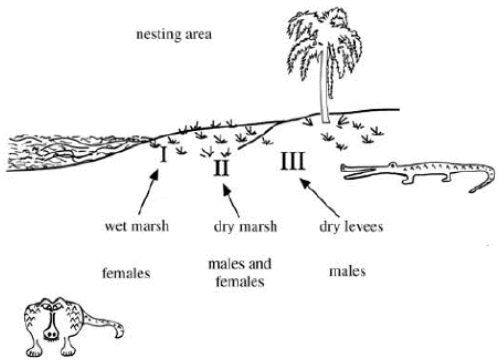


Figura 1 – Ambiente di riproduzione dei coccodrilli [Murray]

Nella figura in alto viene ripreso un disegno tratto dal Murray dove è rappresentato l'ambiente di riproduzione dei coccodrilli. Nel Murray l'ambiente viene considerato suddiviso in tre zone; il modello da noi implementato è più semplice in quanto le zone considerate saranno soltanto due, la "wet marsh", cioè la zona umida, e la "dry levees", cioè la zona secca. Per maggiori dettagli si vedano [Naldi], [Murray].

Determinazione genetica del sesso

Se f(n) e m(n), indicano rispettivamente il numero di coccodrilli femmina e maschio presenti in un determinato anno, le equazioni che descrivono il sistema sono le seguenti:

$$f(n+1) = f(n) + nati\ femmine - \delta f(n)$$

$$m(n+1) = m(n) + nati\ maschi - \delta m(n)$$

Essendo in presenza di risorse limitate (il numero di nidi disponibili è k), occorre introdurre un fattore di saturazione per il numero di nati (sia maschi che femmine) per anno:

$$numero\ di\ nati = \beta\left(\frac{k}{k+f(n)}\right)f(n)$$

Dove indichiamo con F il fattore di saturazione $\frac{k}{k+f(n)}$

Si è giustificato questo fattore di saturazione agli studenti per via grafica (non avendo gli studenti ancora gli strumenti dell'analisi), analizzandone i casi limite.

Solo una frazione di femmine può deporre uova essendoci soltanto k nidi.

Quando il numero di femmine tende a zero il fattore F tende ad 1 mentre quando il numero di individui femminili tende all'infinito il fattore $F = \frac{k}{k+f(n)}$ tende a zero. Si tratta comunque di un'approssimazione, che però risulta particolarmente conveniente dal punto di vista dei calcoli algebrici.

(Si vedano i grafici seguenti dove è mostrato il caso con $f(x)=x^2$. Per f(x) differenti si ottengono curve con andamento simile).

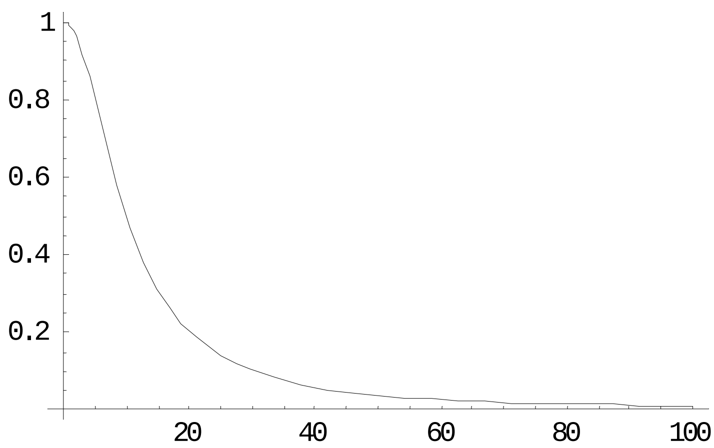


Figura 2 Fattore di saturazione

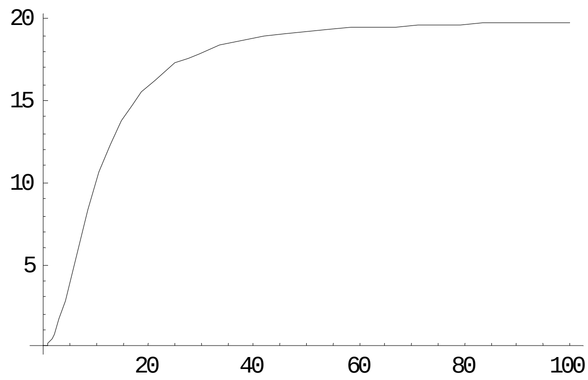


Figura 3 Fattore di saturazione

Le equazioni quindi divengono:

$$f(n+1) = f(n) + \frac{\beta}{2}\left(\frac{k}{k+f(n)}\right)f(n) - \delta f(n)$$

$$m(n+1) = m(n) + \frac{\beta}{2}\left(\frac{k}{k+f(n)}\right)f(n) - \delta m(n)$$

Dove il fattore β/2 in entrambe le equazioni è dovuto al fatto che nel modello genetico stiamo supponendo un 50% di probabilità che il nascituro sia maschio o femmina.

Determiniamo le condizioni di equilibrio teoriche delle due equazioni.

Si avrà equilibrio quando: $f(n+1) = f(n)$ e $m(n+1) = m(n)$. Indicando con f* e m* i valori di equilibrio, si ricava:

$$f^* = \left(\frac{\beta - 2\delta}{2\delta}\right)k$$

$$m^* = \left(\frac{\beta - 2\delta}{2\delta}\right)k$$

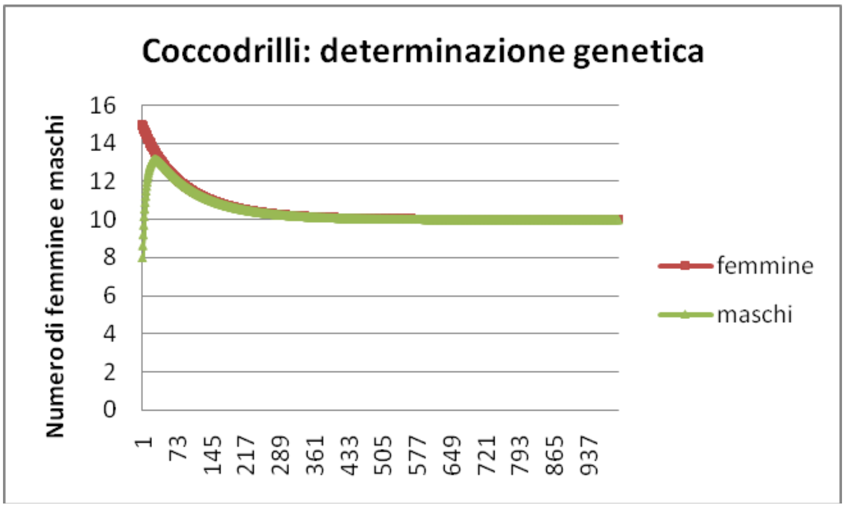
Si ottiene che i valori di equilibrio per il numero di femmine e maschi sono uguale, tali valori saranno positivi purché si verifichi la condizione:

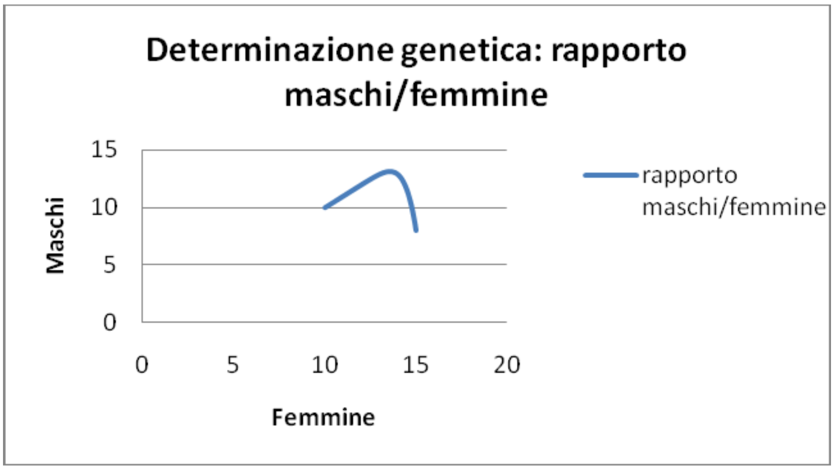
$$\beta > 2\delta$$

Questa rappresenta la condizione per cui la popolazione non si estingua.

Abbiamo implementato queste equazioni al calcolatore mediante foglio elettronico (Excel), con le seguenti condizioni iniziali.

Parametri	
nati/nidiata	0,22
Mortalità	0,1
nidi totali	100
N° femmine iniziali	15
N° maschi iniziali	8





Modello semplificato con determinazione del sesso da parte dell'ambiente

Sviluppiamo un modello semplificato in cui il sesso dei nascituri è determinato dalla temperatura di cova delle uova in accordo alle seguenti ipotesi:

- Le femmine depongono le uova prevalentemente nella zona umida dove sono disponibili k_1 nidi. Da questi nidi nasceranno solo femmine.
- Le femmine che non depongono nella zona umida lo faranno in quella arida, dove supponiamo non ci siano limiti al numero di nidi disponibili nella zona calda (k_2=infinito). Da questi nidi nasceranno individui maschi.

Il numero di femmine che nidifica nella zona umida può essere descritto dal seguente fattore:

$$\left(\frac{k_1}{k_1 + f(n)}\right) f(n)$$

Per cui il numero di femmine all'anno successivo f(n+1) è dato da:

$$f(n+1) = f(n) + \beta\left(\frac{k_1}{k_1 + f(n)}\right) f(n) - \delta f(n)$$

Il numero di femmine che nidifica nella zona secca sarà dato quindi da:

$$\left(1 - \frac{k_1}{k_1 + f(n)}\right) f(n) = \left(\frac{f(n)}{k_1 + f(n)}\right) f(n)$$

Tali femmine darà origine, in accordo alle nostre ipotesi, a individui maschi, per cui:

$$m(n+1) = m(n) + \beta\left(\frac{f(n)}{k_1 + f(n)}\right) f(n) - \delta m(n)$$

Le condizioni di equilibrio per questo modello sono le seguenti:

$$f^* = \left(\frac{\beta - \delta}{\delta}\right)k$$

$$m^* = \left(\frac{\beta - \delta}{\delta}\right)^2 k$$

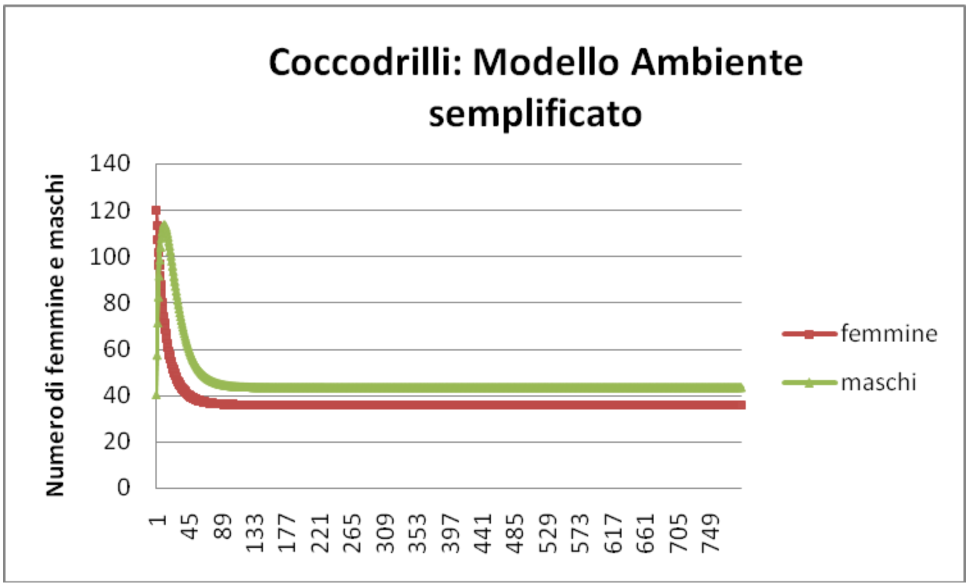
La condizione necessaria perché la popolazione non si estingua è:

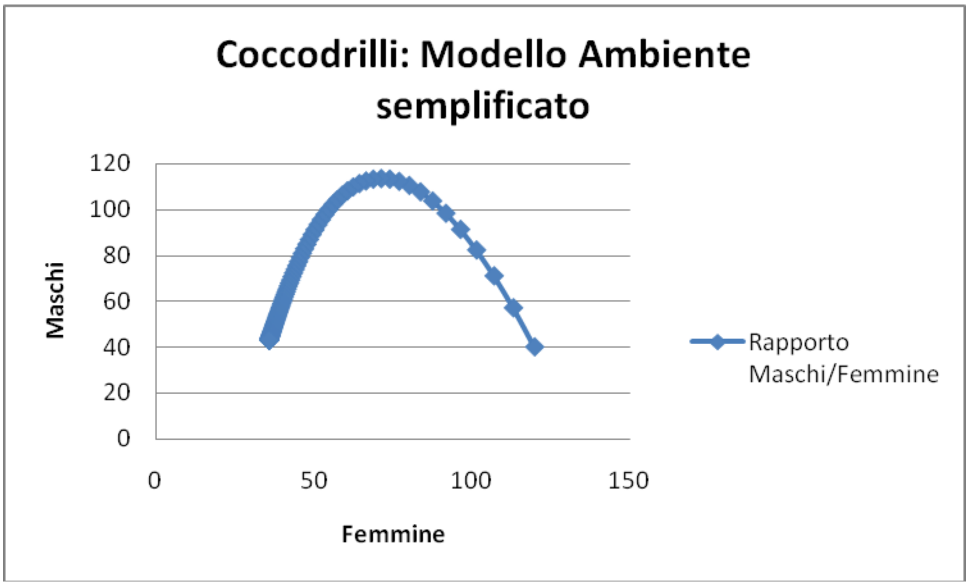
$$\beta > \delta$$

Questa condizione è decisamente più vantaggiosa di quella ottenuta nel modello genetico. Il modello semplificato risulta quindi avere un vantaggio 'evolutivo' sul modello a determinazione genetica. Nella parte che segue analizziamo la parte implementata al calcolatore che conferma i risultati teorici.

Parametri		
nati/nidiata	β	0,22
mortalità	δ	0,1
nidi totali	k	100
nidi umidi	k1	30
nidi secchi	k2	infiniti
Femmine iniziali		120
Maschi iniziali		40

Condizione di equilibrio (teorica)	
f*	36
m*	43,2





Modello completo

Generalizziamo il modello precedente considerando che anche nella zona calda e secca ci sia un numero limitato k_2 di nidi.

Il numero di femmine nella zona umida rimane invariato:

$$f(n+1) = f(n) + \beta\left(\frac{k_1}{k_1 + f(n)}\right) f(n) - \delta f(n)$$

Il numero di femmine che nidifica nella zona calda sarà ridotto di un fattore $\left(\frac{k_2}{k_2+f(n)}\right)$ dovuto alla limitatezza delle risorse in zona calda. Gli individui di sesso maschile aumenteranno quindi secondo una legge:

$$m(n+1) = m(n) + \beta\left(\frac{k_2}{k_2 + f(n)}\right)\left(\frac{f(n)}{k_1 + f(n)}\right) f(n) - \delta m(n)$$

Le popolazioni di equilibrio in corrispondenza di questo modello sono date da:

$$f^* = \left(\frac{\beta - \delta}{\delta}\right) k_1$$

$$m^* = \frac{\beta}{\delta}\left(\frac{k_2}{k_2 + f^*}\right)\left(\frac{(f^*)^2}{k_1 + f^*}\right)$$

La condizione necessaria perché la popolazione non si estingua è ancora la seguente:

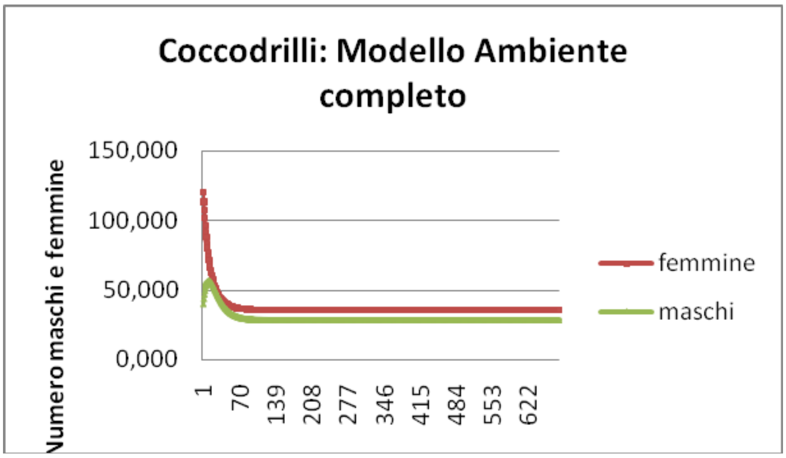
$$\beta > \delta$$

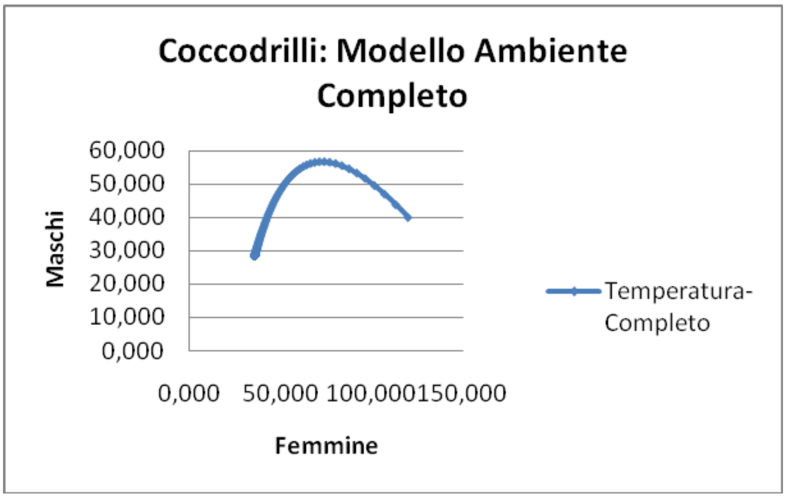
Si tratta cioè della stessa condizione ottenuta nel modello semplificato. Quello che è cambiato in questo modello generalizzato è il numero di individui maschi della popolazione di equilibrio.

Nell'implementazione in Excel abbiamo considerato i seguenti parametri:

Parametri		
nati/nidiata	β	0,22
mortalità	δ	0,1
nidi totali	k	100
nidi umidi	k1	30
nidi secchi	k2	70
femmine	f	120
maschi	m	40

Condizione di equilibrio (teorica)	
f*	36
m*	28





I risultati conseguiti in questa parte del laboratorio sono stati abbastanza soddisfacenti. La maggioranza degli studenti ha dimostrato di aver compreso l'argomento ed ha compreso le differenze tra i tre modelli implementati, hanno saputo poi utilizzare il foglio elettronico per analizzare i modelli proposti facendolo con una certa autonomia.

Approfondimenti ulteriori

Le conclusioni a cui si è giunti con il modello proposto andrebbero confrontate con i dati sperimentali. A questa problematica si è soltanto accennato in classe per mancanza di tempo. Per completezza, citiamo che nel Murray vengono riportati dei dati sperimentali e viene spiegato come il meccanismo TSD consenta di recuperare più facilmente da una riduzione catastrofica della popolazione, e quindi rappresenti un valido metodo dal punto di vista della teoria dell'evoluzione.

Il modello viene approfondito, ricorrendo ai metodi del calcolo differenziale. Il materiale esposto in questo laboratorio può essere ulteriormente approfondito in una classe quinta una volta che gli studenti conoscano i primi elementi dell'analisi.

Riferimenti

[G. Naldi1] La matematica incontra la biologia, presentazione power point

[Comincioli] Modelli matematici, Università di Pavia,2004

[G. Naldi2] Il meccanismo di determinazione del sesso nei coccodrilli fornisce loro un vantaggio evolutivo?

[Murray] J. D. Murray, Mathematical biology. I, third ed., Interdisciplinary Ap-
plied Mathematics, vol. 17, Springer-Verlag, New York, 2002, An introduction.

[May] Robert May, Simple mathematical models with very complicated dynamics