Università degli studi di Milano

RELAZIONE CONCLUSIVA

CORSO DI PERFEZIONAMENTO

TECNICHE E DIDATTICA LABORATORIALI

Una grande scoperta risolve un grande problema, ma c'è una briciola di scoperta nella soluzione di qualsiasi problema. Il tuo problema può essere semplice, ma se mette alla prova la tua curiosità e mette in gioco le tue capacità di invenzione, e se tu lo risolvi con i tuoi mezzi, puoi provare la tensione e il trionfo della scoperta. Queste esperienze possono creare un gusto per il lavoro intellettuale e lasciare la loro impronta sulla mente e sul carattere per tutta la vita.

G. Polya

Docente Relatore: Prof.ssa Stefania de Stefano

Corsista: Dott.ssa Edith Locatelli

Sommario

CAPITOLO 1

I LABORATORI

1.0 Laboratori seguiti

Per la frequenza e lo svolgimento del corso di perfezionamento in "Tecniche e didattica laboratoriali", ho scelto i seguenti due laboratori:

- Laboratorio trasversale sulla valutazione (docente prof.ssa Paola Gario)
- Laboratorio "Giochi matematici" (docente prof.ssa Stefania De Stefano)

La scelta di questi laboratori che possono sembrare distanti tra loro, in realtà è dovuta alla convinzione della reciproca utilità degli stessi per l'analisi, la pianificazione e l'attuazione di attività volte a risolvere la situazione trovata, in particolare, in due delle classi in cui ho insegnato nel corso dell'anno scolastico.
Ancor prima di conoscere i contenuti dei vari laboratori proposti dal corso di perfezionamento, la situazione delle classi mi aveva condotto a riflettere su una possibile utilità dei giochi matematici per condurre i ragazzi ad una più accurata analisi del testo oltre che un recupero della motivazione per lo studio della disciplina.
Unitamente a ciò, l'interesse personale rivolto alle difficoltà di apprendimento in matematica e alle difficoltà della valutazione di abilità e competenze, mi ha condotto alla scelta dei laboratori.
Nei prossimi due paragrafi sono descritte le attività svolte nell'ambito dei due laboratori.

1.1 Laboratorio trasversale sulla valutazione

L'attività svolta nell'abito di questo laboratorio ha riguardato la preparazione di test e/o prove per la valutazione delle difficoltà linguistiche in matematica, in particolare legate alla comprensione del testo.
Le attività sono state pensate e strutturate appositamente per le classi nelle quali ho insegnato in quest'anno scolastico, in particolare per le ***classi terze del Liceo delle Scienze Sociali***, ma potrebbero essere utilizzate anche per altre tipologie di classi ed istituti.
Le prove sono state mirate a verificare in particolare:

- L'effettiva comprensione di un testo di argomento matematico inerente sia argomenti già noti sia nuovi.

- La capacità di individuare le informazioni essenziali in un testo ridotto, come l'enunciato di un teorema
- La capacità di astrazione e comprensione del formalismo matematico

Alcune delle prove preparate sono state somministrate anche in altre classi del Liceo delle Scienze Sociali e in alcune classi del Liceo Linguistico, con risultati, per quest'ultime classi, leggermente diversi. Infatti per gli alunni del liceo linguistico le difficoltà linguistiche, sebbene riscontrate, sembrano meno accentuate.

1.1.1 Fasi dell'attività

Il lavoro si è svolto in diverse tappe, cercando di strutturare un percorso utile al superamento delle difficoltà riscontrate nelle classi.

Per prima cosa ho analizzato le reali difficoltà dei singoli alunni e del gruppo classe, in riferimento a:

- analisi e comprensione di un testo matematico: testo di un problema/esercizio, testi inerenti la spiegazione di contenuti matematici
- comprensione di una formula matematica e più in generale comprensione del formalismo matematico
- capacità di astrazione.

I primi elementi utili a tale analisi sono stati ricavati dall'osservazione dell'effettiva e marcata difficoltà riscontrata dagli alunni nella lettura del libro di testo[1]. Le difficoltà spaziavano dalla comprensione di semplici frasi e/o termini, non solo di carattere strettamente matematico, alla comprensione del formalismo. Dopo aver avuto conferma, da parte dell'insegnante di lettere, dell'effettiva difficoltà in ambito linguistico di un buon numero di studenti, ho svolto un'analisi più mirata ai singoli alunni. Oltre ad un lavoro svolto in classe durante le lezioni, mediante domande rivolte individualmente agli alunni, è stato somministrato un test cloze, già predisposto, inerente le coordinate cartesiane. Il test è stato accolto con "stupore" poiché la tipologia della prova mal si accordava con la loro idea di matematica: "perché esercizi di comprensione del testo in matematica?", "non basta applicare formule?".

Dopo un primo momento di "discussione" il test è stato svolto con esiti interessanti ed ha portato gli alunni a riflettere riguardo all'estrema importanza del testo (lettura, analisi e comprensione) anche in matematica: "per agire devo prima capire…"

[1] Massimo Bergamini, Anna Trifone, *"Fondamenti del calcolo algebrico e geometria analitica"*, modulo S + L verde. Zanichelli.

I risultati ottenuti, unitamente alle osservazioni fatte precedentemente, hanno consentito la messa a fuoco delle difficoltà più marcate e diffuse, e quindi la pianificazione di strategie di intervento utili a migliorare le competenze inerenti l'analisi del testo, la comprensione e l'utilizzo del formalismo.
In particolare, durante lo svolgimento di ogni singola lezione si è cercato di analizzare più accuratamente la parte teorica proposta dal libro di testo e si sono sollecitati gli alunni ad analizzare con maggior attenzione i testi degli esercizi (problemi di geometria analitica, in particolare quelli riepilogativi), così da rendere l'analisi del testo la prima parte fondamentale per qualsiasi attività.

Ho quindi pensato e preparato altri test cloze inerenti il programma delle classi terze. In particolare sono stati realizzati:

- Un test cloze[2] con domande, sulla condizione di tangenza (di una retta ad una parabola).
- Un test cloze[3] sulla circonferenza
- Una prova/esercitazione[4] sulla legge dello sdoppiamento

Non ho assegnato ai test una valutazione in decimi.
Ho considerato i test come attività di analisi del testo indispensabili ed integranti lo svolgimento dell'attività didattica.
Il test relativo alle <u>tangenti ad una parabola</u> mi ha permesso di:

a) verificare la ricaduta delle lezioni svolte sull'argomento sulla capacità di affrontare gli esercizi proposti nella scheda,
b) verificare la capacità degli alunni di completare un testo riguardante una procedura ormai acquisita,
c) verificare la capacità di spiegare a parole un semplice procedimento e calcolo algebrico.

Il test relativo all'<u>equazione della circonferenza,</u> svolto qualche tempo dopo, mi ha consentito di valutare l'efficacia dell'attività didattica svolta.
Una buona percentuale di alunni, che aveva trovato difficoltà nei test precedenti, ha migliorato e si è dimostrata in questa occasione più cauta e più riflessiva davanti ad un testo matematico.
Alcuni alunni hanno evidenziato ancora rilevanti difficoltà, dovute in particolare a diffuse lacune di tipo linguistico per le quali si dovrebbe pensare ad un intervento più mirato, trasversale per le varie discipline.
L'ultima attività relativa alla <u>legge dello sdoppiamento</u> è stata sicuramente la più impegnativa nello svolgimento in classe e la più complessa, ma ha permesso di focalizzare l'attenzione

[2] Allegato 1
[3] Allegato 2
[4] Allegato 3

sull'importanza del formalismo e del rigore, riprendendo anche aspetti e termini poco utilizzati dai ragazzi.

1.2 Laboratorio "Giochi matematici"

Nell'ambito del laboratorio "Giochi matematici" si sono svolte diverse attività e nel capitolo 2 della presente relazione ne è descritta una in dettaglio.

Per questo motivo, si riporta di seguito un elenco e una breve descrizione delle diverse attività, rimandando al capitolo successivo l'esposizione più dettagliata di alcuni particolari legati alla motivazione e all'organizzazione delle diverse attività.

1.2.1 Attività svolte

Le attività svolte e seguite nell'ambito del laboratorio sono state:

- Organizzazione ed attuazione di un percorso inerente i giochi matematici, per le classi in cui ho insegnato durante l'anno scolastico (in particolare per le due classi terze del liceo delle scienze sociali). Questa attività è descritta in dettaglio nel capitolo 2.
- Organizzazione ed attuazione di interventi "isolati" (cioè non come parte di un percorso più ampio) della durata di due ore, in classi in cui insegno (oltre alle due terze) e in classi di colleghi: in collaborazione con alcuni di loro, si sono organizzate lezioni dedicate ai giochi matematici, con lo scopo di presentare la matematica in modo diverso ed insolito. A seconda delle classi destinatarie, sono stati selezionati giochi di tipo diverso, anche facendo riferimento al materiale in rete relativo al Progetto Lauree Scientifiche.

  In alcuni di questi incontri, in particolare nelle classi di livello più alto e/o più partecipi, si è cercato di proporre l'attività non tanto come momento ludico isolato e fine a sé stesso, quanto come occasione per riflettere sull'utilità di alcuni contenuti matematici in contesti ritenuti non usuali e con modalità meno "scolastiche".
- Partecipazione come animatore presso il liceo scientifico "Primo Levi" a San Donato (MI), nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche, a vari incontri coordinati dalla professoressa Stefania De Stefano.

  Tale esperienza è stata interessante e mi ha permesso un confronto con l'attività svolta nelle mie classi. Osservazioni e considerazioni a riguardo sono riportate nel capitolo successivo.

CAPITOLO 2

GIOCHI MATEMATICI

Ho svolto l'attività presentata in questo capitolo nel corso dell'anno scolastico 2008/2009, in due classi terze del Liceo delle Scienze Sociali "G. Falcone" di Bergamo, come parte integrante dell'attività didattica. I tempi, i modi, e per certi aspetti anche le motivazioni del percorso sono stati diversi rispetto a quanto proposto nell'ambito del progetto Lauree Scientifiche.

2.0 Motivazioni dell'attività

L'intera attività è stata pensata per far fronte ad una situazione, piuttosto complessa, trovata nelle due classi terze conosciute all'inizio dell'anno scolastico.

Sono due classi molto diverse che presentano però alcuni aspetti comuni. Nella tabella seguente sono riportate, sinteticamente, le caratteristiche più importanti, che sono state alla base della pianificazione dell'attività.

Le due classi sono state genericamente indicate come classe A e classe B.

	Classe A	Classe B
Rapporto con la disciplina	Gli alunni di entrambe le classi sono persuasi che la matematica sia solo un insieme di formule da imparare a memoria e quindi da applicare meccanicamente	
	Un buon numero di alunni è purtroppo convinto che la matematica sia troppo difficile e non meriti nemmeno un tentativo: la matematica è "qualcosa per pochi eletti"	
Partecipazione	La classe è decisamente passiva e non collaborativa: nulla sembra poter coinvolgere ed interessare; si fatica ad ottenere risposte a semplici domande (non solo inerenti la disciplina ma anche domande "di servizio"). Tale comportamento è generalizzato a tutte le discipline.	La classe partecipa, anche se in modo disordinato; reagisce a nuove proposte prima con titubanza poi con crescente interesse. Gli alunni si lasciano coinvolgere, ma sono poco propositivi e poco autonomi.

<table>
<tr><th></th><th>Classe A</th><th>Classe B</th></tr>
<tr><td>Relazione tra gli alunni</td><td>La classe è divisa in piccoli gruppetti (di due o tre persone) che temono il confronto reciproco, l’opinione e il giudizio degli altri.
Vi sono diversi leader negativi sia per quanto riguarda l’atteggiamento nei confronti della disciplina, sia per quanto riguarda l’atteggiamento nei confronti dell’adulto e quindi degli insegnanti.</td><td>La classe è “nuova” perché unione di due ex seconde: non c’è quindi unità, non c’è il gruppo classe, ma tanti piccoli gruppi che lavorano slegati ed indipendenti, quasi come se ignorassero l’esistenza gli uni degli altri.</td></tr>
<tr><td>Difficoltà nell’ambito della disciplina riscontrate ad inizio anno scolastico</td><td colspan="2">• La maggior parte degli alunni fatica ad individuare in un testo matematico le informazioni utili ed essenziali per la risoluzione di un problema: la fase di comprensione linguistica è ritenuta una prerogativa delle materie umanistiche.
• Diversi alunni hanno lacune pregresse anche gravi, hanno perso motivazione ed interesse e sembrano, fin da subito, rinunciare anche al tentativo
• Entrambe le classi hanno svolto solo cenni di geometria nei primi due anni e gli studenti sono per lo più abituati ad un’applicazione meccanica dei contenuti. Difficile e non autonoma l’applicazione delle conoscenze in contesti nuovi.</td></tr>
</table>

2.0.1 Perché i giochi matematici?

Esaminato il quadro generale mi sono chiesta come sbloccare la situazione e agire “contemporaneamente” su più fronti:

- motivazione ed interesse
- atteggiamento di collaborazione tra alunni e con l’insegnante
- studio mnemonico/metodo di studio
- analisi del testo

Facendo tesoro delle osservazioni fatte dalla prof.ssa De Stefano e delle reazioni degli alunni di anni precedenti alla presentazione di alcuni giochi matematici, si è quindi pensato di affrontare la situazione scegliendo una via, considerata dai più, alternativa e/o insolita.

Parlare in classe di giochi matematici, per i ragazzi, significa, almeno inizialmente, giocare, staccare da quella disciplina fredda e per nulla coinvolgente quale è la matematica per loro (questo purtroppo per gli alunni delle mie classi terze!). Ciò che però è inizialmente solo un gioco, può diventare uno strumento per avvicinare gli alunni alla disciplina, per far scoprire come una situazione problematica legata alla possibile vita quotidiana o semplicemente ad un gioco già noto, possa essere affrontata e risolta con metodologie e procedure prettamente matematiche, per nulla meccaniche, assolutamente accessibili e, perché no, anche interessanti e coinvolgenti.
Del resto la fascia d'età considerata, 16-17 anni, propone ragazzi che iniziano a vedere il gioco come una cosa da piccoli, ma in fondo "giocano" ancora volentieri se è il gruppo a farlo e se questo permette di valorizzarsi nel gruppo.
Il gioco matematico implica poi altri meccanismi:

- innanzitutto si deve aver ben chiara la richiesta, il che implica l'analisi e la comprensione del testo del gioco, quindi l'individuazione delle informazioni necessarie e dell'obiettivo da raggiungere
- la scelta della strategia vincente passa attraverso prove, analisi, riflessioni, tentativi e fallimenti, costruzione di modelli, modifica e affinamento di modelli già noti ma utilizzati in contesti diversi.

2.1 Organizzazione e svolgimento dell'attività

Considerate le osservazioni riportate sopra si è deciso di procedere per piccoli passi e saggiare la disponibilità degli alunni a proposte diverse in contenuti e modalità.
L'attività può quindi essere descritta in diverse fasi:

prima fase: sono stati proposti alcuni giochi matematici come "giochini" da risolvere tra una lezione e l'altra. Questa prima fase si è attuata tra ottobre e dicembre.

seconda fase: accertato l'interesse dei ragazzi, si sono dedicate due ore di lezione interamente ai giochi matematici. Tale incontro è stato tenuto nel mese di dicembre per entrambe le classi.

terza fase: considerato il positivo coinvolgimento dei ragazzi all'incontro di due ore dedicato ai giochi, si è proposto un percorso in più incontri che si è poi svolto durante l'anno scolastico, dedicato ai giochi matematici di tipo diverso.

La proposta e l'organizzazione di tale percorso sono state fatte poco prima delle vacanze natalizie; gli incontri si sono svolti tra la metà di gennaio e la fine di aprile. In particolare si sono programmati gli incontri con la seguente cadenza (non tutti gli incontri sono stati di due ore):

seconda metà di gennaio

fine febbraio

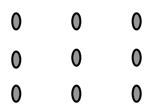
inizio marzo e fine marzo

fine aprile.

2.1.1 Prima fase: commenti ed osservazioni

Sono stati assegnati agli alunni delle due classi dei quesiti di tipo logico per la cui risoluzione non sono necessarie particolari conoscenze matematiche. Inizialmente i quesiti, sebbene formulati durante la lezione, sono stati lasciati da risolvere per le lezioni successive in modo da "punzecchiare", incuriosire e coinvolgere il maggior numero possibile di persone.
Si è cercato di inserire tali giochi come esemplificazione di commenti inerenti compiti, domande fatte dagli alunni, osservazioni metodologiche.

Uno dei primi quesiti è stato proposto durante una piccolo "dibattito", scaturito in classe, sulla necessità di un'attenta analisi del testo ed è il seguente (penso più che conosciuto):



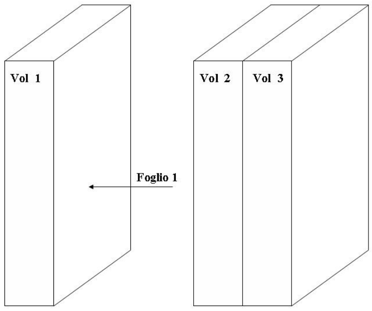
Dati i nove punti disposti come in figura, congiungere tutti i nove punti con quattro segmenti, senza mai staccare la matita dal foglio (non è possibile passare per un punto per più di una volta)

Il quesito è stato proposto oralmente, senza fornire testo scritto agli alunni.
Nelle lezioni successive si è discusso sulla soluzione ed in particolare riguardo al motivo per cui alcuni ragazzi non hanno raggiunto la soluzione.
Una delle motivazioni più frequenti era l'introduzione di un'ipotesi … inesistente: l'esistenza di un quadrato entro cui operare (quadrato sui cui lati sono disposti tutti i punti escluso quello in posizione centrale).
Li ho condotti a riflettere sui seguenti punti:

- necessità di individuare tutti e soli i dati e le informazioni fornite dalla situazione problematica proposta
- necessità di tenere in considerazione le diverse possibilità di risoluzione di un problema
- importanza di "provare" e riprovare … fino alla soluzione
- importanza di lasciare traccia dei vari passi che hanno condotto alla soluzione: se osservo i tentativi "falliti" posso imparare dagli errori e, in particolare, posso evitare di intraprendere più volte uno stesso percorso sbagliato
- l'introduzione di ulteriori condizioni può rendere un problema non risolubile.

Ho proposto agli alunni un altro quesito, questa volta fornendo loro il testo scritto e rimandando la discussione della soluzione alle lezioni successive.

Un tarlo dispettoso!!
Giorgio ha appena comprato un'enciclopedia in dieci volumi. La sistema normalmente lungo uno scaffale della sua libreria partendo da sinistra con il primo volume, mettendogli a destra il secondo e così via. Ogni volume dell'enciclopedia è composto di 100 fogli, copertine comprese. Un tarlo dispettoso comincia a forare dalla prima pagina (la copertina) del primo volume tutte le pagine seguenti, da sinistra a destra, fino all'ultima pagina dell'ultimo volume. Quanti fogli ha forato il tarlo?



Soluzione:
Il tarlo ha forato 802 fogli. Basta pensare a come vengono normalmente disposti i volumi in una libreria. Il primo volume avrà il primo foglio (la prima di copertina) sulla faccia rivolta a destra, mentre l'ultimo volume avrà la sua ultima pagina (la quarta di copertina) rivolta a sinistra.
Quindi i primi 99 fogli del primo volume e gli ultimi 99 fogli dell'ultimo volume non vengono forati dal tarlo.

Qualche alunno ha ammesso di aver disposto realmente dei libri sulla propria libreria di casa e di essere così arrivato alla soluzione. Da qui l'analisi e il confronto delle diverse strategie e degli errori.

Osservazione: Nel corso dell'esperienza ho notato che, a differenza degli alunni del liceo scientifico con i quali ho svolto l'esperienza di animatore (progetto PLS), i "miei" alunni hanno fatto ricorso in modo più massiccio alla teatralizzazione della situazione problematica proposta, sia per comprendere la situazione stessa e le richieste del problema, sia per impostare la strategia risolutiva.

Oltre a questi sono stati sottoposti altri quesiti, semplici, alcuni già noti a qualcuno, con lo scopo di incuriosire e attirare l'attenzione su quanto alcuni particolari possano fare la differenza e rendere tutto più semplice … o estremamente complicato e impossibile!
In questa prima fase gli alunni si sono dimostrati interessati e partecipi: i quesiti si sono diffusi per i corridoi e tra gli altri docenti coinvolti, loro malgrado, dai ragazzi.

2.1.2 Seconda fase: commenti ed osservazioni

Testato l'interesse e le buone potenzialità delle classi, si è proposta un'intera lezione dedicata unicamente ai giochi matematici.

Volendo smuovere gli studenti, volendo cioè attirare in qualche modo la loro attenzione ho cercato di proporre il primo quesito in modo insolito: al loro arrivo in classe, alla prima ora, hanno trovato la porta chiusa a chiave e affisso sulla porta una piccola filastrocca che comunicava loro l'unico modo per poter entrare in classe: risolvere correttamente il quesito proposto (riportato di seguito).
Nonostante le classi coinvolte siano due terze, devo ammettere che tale modo di proporre il quesito ha senza dubbio attirato la loro attenzione e li ha predisposti più che positivamente alla collaborazione: si sono messi in gioco.

L'enigma della serratura
La combinazione della serratura della porta……è il numero successivo a questa sequenza di numeri:
1
11
21
1211
111221
???????????????????

Qual è la combinazione?

<u>Soluzione</u>
Osservando "matematicamente" la successione di numeri, sembra non esista alcuna relazione. Cambiamo strategia e proviamo a leggere ciò che c'è scritto: nella prima riga troviamo "*un uno*" e questo lo troviamo scritto matematicamente nella seconda riga!
Nella seconda riga troviamo scritti "*due uno*" e questo lo troviamo scritto matematicamente nella terza riga (21); in questa leggiamo "*un due e un uno*", frase riportata, matematicamente, nella riga successiva, e così via.
Quindi nell'ultima riga leggiamo "*tre uno, due due e un uno*", quindi la combinazione richiesta è:
312211

Il primo approccio dei ragazzi (probabilmente spontaneo a chiunque) è stato quello di cercare una relazione di tipo matematico, anche in riferimento al sistema di numerazione binario: devo dire che ci sono stati dibattiti animati e piuttosto interessanti. Successivamente ho ricordato loro una tra le frasi più ripetute in classe: "se vuoi comprendere un testo … inizia a leggerlo". Qualcuno ha iniziato a pensare a qualcosa di diverso da un procedimento o meccanismo puramente matematico e, senza ulteriori aiuti, ha dato la soluzione corretta.
I ragazzi che per primi hanno dato la soluzione sono stati gli studenti che pur dotati di buone capacità, solitamente non studiano la disciplina o la studiano senza continuità.
Questi stessi ragazzi sono stati quelli che, nel corso della lezione hanno contribuito a guidare prima il gruppo, poi la classe verso modi diversi di pensare proponendo alternative.

Si riportano di seguito alcuni dei quesiti proposti in questo incontro, con le relative osservazioni.

I 20 orafi

Un ricco califfo aveva presso la sua corte 20 orafi, ciascuno dei quali, ogni mese fabbricava 100 statuette d'oro. Egli forniva a ciascuno di essi delle quantità d'oro con l'accordo che per ogni 100 grammi d'oro fornito gli venisse consegnata una statuetta d'oro del peso di 100 grammi. Uno di questi orafi imbrogliava il califfo fabbricando tutte le statuette di 90 grammi. Accortosi dell'inganno, il califfo chiamò il saggio di corte e gli disse: "hai a disposizione una bilancia a un solo piatto. Devi trovare, potendo utilizzare la bilancia una sola volta, l'orafo che imbroglia". Il saggio ci riuscì. Come fece il saggio? Puoi dedurre qual è il minimo numero di statuette consegnate da ogni orafo?

Soluzione:

Per semplicità possiamo supporre che gli orafi siano anche in numero minore, per esempio 5.

Il nostro saggio tiene separate le statuette dei singoli orafi fino ad averne 5 per ciascuno (20 ciascuno, se consideriamo tutti gli orafi del testo). A questo punto prende una statuetta del primo orafo, 2 statuette del secondo orafo, tre statuette del terzo orafo, e così via (…..n statuette per l'ennesimo orafo). Mette tutte le statuette (tutte insieme!!) sulla bilancia e calcola quanti grammi mancano.

Ora: se gli orafi sono 5, il peso delle statuette dovrebbe essere:

orafo n°	n° statuette	peso (in grammi)	
1	1	100	
2	2	200	
3	3	300	
4	4	400	
5	5	500	
		1500	totale

Quindi:
se mancano 10 grammi l'orafo che imbroglia è il primo,
se mancano 20 grammo l'orafo che imbroglia è il secondo
se mancano 30 grammi l'orafo che imbroglia è il terzo,
……………………………………………

1500
totale

Quindi:
se mancano 10 grammi l'orafo che imbroglia è il primo,
se mancano 20 grammo l'orafo che imbroglia è il secondo
se mancano 30 grammi l'orafo che imbroglia è il terzo,
……………………………………………

Il quesito dei 20 orafi non è stato di facile soluzione: tutte le soluzioni e gli accorgimenti inizialmente proposti non soddisfacevano la condizione della singola pesata. Una delle difficoltà, per qualche studente, è stata quella di avere a che fare con ben 20 orafi e 100 statuette: quali sono le informazioni davvero importanti e necessarie? È importante che gli orafi siano proprio 20? È necessario considerare tutte e 100 le statuette?

Da qui la considerazione che il problema poteva essere risolto considerando un numero ridotto di orafi.

Considerando le statuette tutte uguali (in forma e dimensione) come è possibile distinguere le statuette dei vari orafi? Da questa domanda è scaturita la riflessione che gradualmente, ma non immediatamente, ha portato alla risoluzione della situazione problematica.

La spia russa

Un agente segreto russo, dopo anni e anni di ricerca, riesce a scoprire una base segreta americana. Capisce che per entrarvi bisogna conoscere la parola segreta o un codice che però ogni giorno cambia. Un giorno, nascosto dietro una siepe ascolta i dialoghi che avvengono all'entrata della basa. Un tale bussa alla porta. Una voce da dentro dice: "***sei***". E da fuori il tale risponde: "***Tre***". La porta si apre e il tale entra. Dopo poco arriva un tizio che nuovamente bussa alla porta; si sente da dentro: "***otto***". E il tizio da fuori: "***quattro***". La porta si apre e il tizio entra. Dopo cinque minuti arriva un nuovo personaggio; bussa e da dentro: "***Dieci***". E da fuori: "***cinque***". La porta si apre e il nuovo personaggio entra. "allora ho capito – pensa tra se l'agente russo – ma per sicurezza aspetto ancora una volta. Meglio avere una conferma in più." Dopo due minuti arriva un nuovo agente segreto, bussa alla porta e da dentro si sente: "***dodici***". E da fuori: "***sei***". Ancora una volta la porta si apre e l'agente entra. "allora è vero: è proprio questo il trucco!" si precipita, sicuro di se, all'entrata; bussa e da dentro si sente: "***Quattordici***". Allora lui, fiero di aver trovato la parola chiave, risponde: "***sette***". La porta si apre, ma ne spunta una pistola che lo colpisce mortalmente. In che cosa ha sbagliato il nostro agente?

Il quesito, molto semplice, è stato proposto al termine della lezione, più che altro per curiosità personale per i seguenti motivi:

- La complessità del quesito è ridotta, le osservazioni scaturite invece interessanti: il problema, mi ha permesso di far osservare agli alunni come da una sequenza finita non descritta con una legge, non si può inferire il termine successivo.
- Personalmente penso che, a volte, quesiti come questi "funzionino" meglio se raccontati a voce, almeno inizialmente: mi è sembrato che il racconto, la narrazione di una piccola storiella, abbia attirato la loro attenzione e li abbia coinvolti maggiormente, creando un clima particolare. Sicuramente un quesito di complessità maggiore richiede un'analisi ripetuta del testo, quindi all'esposizione orale deve seguire la lettura e l'analisi del testo scritto.
- La soluzione del quesito permette di far riflettere su come sia sempre importante prendere in considerazione e valutare diversi approcci e diversi modi di procedere, così da considerare tutte le possibili alternative.

2.1.3 Prime ricadute sull'attività didattica

Le attività svolte nelle prime due fasi precedentemente illustrate, hanno portato, nelle due classi, alcuni cambiamenti:

- Miglioramento del rapporto classe-insegnante;
- Recupero della motivazione per un discreto numero di alunni, in particolare per quegli studenti che dimostrano di avere reali difficoltà logico-organizzative;
- Miglioramento nel prestare attenzione al testo per l'individuazione delle informazioni essenziali.

Considerato tutto ciò mi sono convinta dell'utilità di un percorso più ampio, che mirasse ad ottenere:

- Miglioramento della relazione tra gli alunni
- Mantenimento del grado positivo di motivazione
- Miglioramento delle capacità di gestione delle informazioni, mediante l'utilizzo di schemi e grafici anche semplici
- Miglioramento delle abilità e competenze linguistiche, necessarie per l'esposizione scritta e orale di procedimenti logici ed algebrici utilizzati
- Maggiore consapevolezza dell'unità del sapere matematico, a partire dalla considerazione di come contenuti di aritmetica, algebra e geometria (considerate a volte dagli alunni tre "matematiche" distinte) possano concorrere insieme alla risoluzione di una situazione problematica.

2.1.4 Terza fase: commenti ed osservazioni

Ribadito da parte dei ragazzi l'interesse per i giochi matematici e ritenuto buono il grado di coinvolgimento ottenuto, si è proposto alle classi, l'organizzazione e la pianificazione di un percorso dedicato ai giochi matematici, pensando alla programmazione di "lezioni" particolari, per le quali i ragazzi (in particolare quelli della classe B, cfr. 2.0) hanno ritenuto opportuno trovare un nome particolare: ZONA FRANCA!

Le difficoltà iniziali nell'organizzazione di un tale progetto sono state:

- ritagliare ore da dedicare a tale attività: per non gravare troppo sull'orario settimanale (già decimato da uscite, conferenze e altro), si è cercato di approfittare delle assenze dei colleghi, programmate per attività con altre classi, ai quali avevo manifestato l'intenzione di attuare l'attività

- gestire in modo proficuo il gruppo classe durante gli incontri: non per tutti gli incontri sono riuscita ad avere l'assistenza di qualche collega. Sicuramente la presenza di più animatori è decisamente più redditizia e permette di seguire con attenzione i vari gruppi; gestire senza collaboratori il gruppo classe oltre a essere faticoso, non permette di prestare attenzione ai particolari e a volte si perdono alcune fasi importanti e/o interessanti del lavoro dei singoli gruppi, rallentando l'attività. D'altro lato, la presenza in classe di un solo animatore, in un certo senso ha fatto sentire gli alunni più responsabili: sentivano di doversi arrangiare, o comunque di doverci provare. In tal senso gli incontri gestiti senza l'aiuto di un collega mi hanno permesso di osservare che, se "costretti", anche se con difficoltà molti alunni provano a gestirsi autonomamente nel tentativo di risolvere qualcosa che ritengono interessante e che li mette alla prova. Il tutto ha funzionato meglio, contro ogni aspettativa, nella classe più numerosa in cui sono presenti diversi leader positivi, che riescono a coinvolgere e gestire il gruppo. Va comunque sottolineato che la classe più numerosa è, in questo caso, la classe di livello più alto, sia per profitto che per capacità.
- Creare un filo conduttore tra i vari incontri distanti anche un mese. Si è pensato, per questo, a diverse iniziative:
  - Si è allestito, in ciascuna classe, un angolo dedicato ai giochi matematici e alle attività connesse (illustrato in seguito)
  - Nel corso dell'anno si sono presentate attività (cui non sempre è stata dedicata l'intera ora di lezione) e ricorrenze come il PI DAY (14 marzo) e una mini gara tra le due classi per la risoluzione dei quesiti Kangourou.

Immagine scelta dai ragazzi per il pi day

2.1.4.1 Il filo conduttore

Per creare un filo conduttore tra i vari incontri e tenere vivo l'interesse e coinvolgimento, in ciascuna classe è stato allestito un cartellone con diverse sezioni:

- *Il quesito del mese*: sezione dedicata ai quesiti lasciati da risolvere tra un incontro e l'altro. I quesiti assegnati sono stati per lo più di tipologia simile ai giochi di scacchiera. Tale tipologia di giochi è piaciuta ai ragazzi perché ha consentito a ciascuno di loro di poter "costruire" la soluzione mediante una procedura concreta, fatta di azioni, con la possibilità di ripeterla, modificarla e/o ottimizzarla in piena autonomia e con i propri tempi.

- *Vignetta e/o aforisma della settimana*: reperiti in rete o disegnati dagli studenti (proposto da loro). Tale sezione è diventata, per certi aspetti, un angolo trasversale alle varie discipline con richiami umoristici riferiti non solo alla matematica ma anche alle scienze sperimentali, alla filosofia e al vissuto scolastico quotidiano dei ragazzi. L'aggiornamento di tale sezione, diversamente da quanto pensato, non è stata settimanale: sarebbe stato quasi un obbligo e per questo meno piacevole e poco spontaneo. Dopo un primo momento di perplessità, gli alunni hanno preso con simpatia tale sezione e periodicamente, con molta spontaneità, hanno provveduto ad aggiornala.

Vignetta disegnata dai ragazzi

- *Date*: piccola sezione dove sono state riportare le date delle lezioni dedicate ai giochi matematici (tenuta aggiornata dai rappresentati di classe)

- *Soluzioni dei quesiti*: in una cartelletta sono state messe le soluzioni dei quesiti proposti durante gli incontri. Per i quesiti rivelatisi difficili durante gli incontri, le soluzioni sono state messe dall'insegnante, qualche giorno dopo l'incontro; per i quesiti di difficoltà minore, è stato chiesto ai vari gruppi di fare una breve relazione indicando e schematizzando la strategia utilizzata per la risoluzione dei vari quesiti.

- *Diario di bordo*: in cui, dopo ogni incontro i ragazzi hanno lasciato considerazioni e commenti riguardo ai quesiti (difficoltà, gradimento….): è stata una sezione un po' difficile da gestire perché si sono dovuti sollecitare più volte gli alunni a produrre materiale. Se dovessi ripetere l'esperienza, tale sezione sarebbe da ripensare e riorganizzare meglio.

- *Gruppi*: qualche giorno prima di ogni incontro, sono stati esposti i gruppi di lavoro. Si sono testati diverse tipologie di gruppo.
    - gruppi di livello (profitto scolastico): hanno creato tempi molto diversi nella risoluzione dei vari quesiti, accentuando, per alcuni gruppi le difficoltà nella risoluzione

- gruppi misti: è una buona soluzione, ma i gruppi devono essere calibrati bene per non incorrere nel rischio che qualche componente del gruppo resti isolato e non riesca a ritagliarsi un proprio ruolo
- gruppi per uniformità di "carattere" personale: questa tipologia di gruppo è abbastanza particolare e non sempre funziona: a volte si hanno gruppi un po' spenti o al contrario troppo attivi e polemici.

La soluzione migliore è sembrata quella con gruppi misti sia per profitto che per capacità (non sempre capacità e profitto coincidono) e carattere. Nel corso dei vari incontri si è cercato di calibrare le varie componenti per formare gruppi il più possibile collaborativi e uniti.

L'idea del cartellone si è rivelata positiva ma anche impegnativa per l'insegnante: in una della due terze (classe A, cfr. 2.0), in particolare, si sono sempre dovuti sollecitare gli alunni alla consegna del materiale richiesto. Nell'altra classe (classe B), la più numerosa, il cartellone è diventato parte dell'attività scolastica quotidiana ed ha permesso di mantenere vivo l'interesse e il coinvolgimento, diventando a volte uno strumento di comunicazione immediata tra gli alunni e con l'insegnante.

Cartellone organizzato in una classe

2.1.4.2 Struttura ed organizzazione degli incontri

Ogni incontro è stato organizzato prevedendo:

- Una prima parte, iniziale, in cui discutere più o meno brevemente, riguardo al quesito lasciato da risolvere qualche tempo prima. Si è trattato, in genere, di giochi di scacchiera, piuttosto apprezzati dai ragazzi.
- Una seconda parte, la più corposa, dedicata allo svolgimento dei giochi proposti e quindi al lavoro di gruppo
- Un'ultima parte, a volte anche di pochi minuti, dedicata a raccogliere, a caldo, le opinioni dei ragazzi riguardo all'incontro: difficoltà, gradimento, osservazioni varie …

2.1.4.3 Analisi di alcuni quesiti

Di seguito sono riportati solo alcuni dei quesiti affrontati dagli alunni durante i vari incontri. Si è cercato di riportare quelli più significativi anche in considerazione del fatto che alcuni di questi sono gli stessi sottoposti agli alunni, di prima e seconda, del liceo scientifico "Primo Levi" di San

Donato: si è ritenuto interessante fornire, per tali quesiti osservazioni di confronto inerenti metodologie risolutive e difficoltà riscontrate dagli studenti.

Giochi di scacchiera

Come si è accennato precedentemente, si sono prevalentemente assegnati i giochi di scacchiera come quesiti da svolgere tra un incontro e l'altro.

Un buon numero di ragazzi, poco motivati in matematica, si perdono subito d'animo se da soli non trovano subito la soluzione: i giochi di scacchiera sono sembrati quelli migliori da lasciare per lo svolgimento individuale. Infatti essi permettono una risoluzione "pratica", fatta di prove successive che possono essere fatte a più riprese, in modo autonomo, con i propri tempi.

In classe, all'inizio di ogni incontro, i vari giochi sono stati ripresi per l'analisi più accurata della risoluzione. Se l'individuazione delle strategie risolutive non ha presentato particolari difficoltà, più complessa è stata la comprensione delle motivazioni matematiche e la comprensione del perché tali giochi sono giochi matematici.

Il gioco dei grattacieli

In una città ultramoderna ci sono solo grattacieli da 10, 20, 30 o 40 piani. La pianta di un isolato di tale città è rappresentata con una griglia quadrata. I grattacieli di una stessa linea, riga o colonna, sono tutti di "taglia" diversa.

Regole del gioco.

Le informazioni date sui bordi grigi indicano il numero di grattacieli visibili sulla linea corrispondente, da un osservatore posto in quella posizione. Ad esempio, se guardando l'isolato dal lato corrispondente al lato alto della griglia si vedono in sequenza da sinistra a destra:

4 grattacieli, 1 grattacielo, 3 grattacieli, 2 grattacieli,

sulla griglia compariranno i numeri qui a lato. Analogamente guardando dagli altri lati.

	4	1	3	2	
2					2
3					1
2					2
1					3
	1	2	2	2	

Si mettono a confronto, nella tabella seguente, osservazioni inerenti le diverse difficoltà rilevate su alunni di classi diverse.

	Terze Liceo Scienze Sociali	*Prima e seconda Liceo Scientifico*
Comprensione del testo	Inizialmente difficile la comprensione delle regole del gioco: gli alunni sono stati invitati più volte alla rilettura del desto e all'osservazione della scacchiera proposta. Le difficoltà sono da attribuire alle globali difficoltà nella comprensione del testo (in particolare per la classe A. cfr 2.0).	Le regole del gioco non sono state del tutto chiare subito, ma gli alunni hanno riletto il testo più volte in modo quasi autonomo.

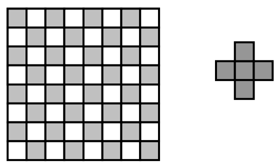
	Terze Liceo Scienze Sociali	*Prima e seconda Liceo Scientifico*
Risoluzione	Comprese le regole del gioco, la risoluzione non ha presentato particolari difficoltà ed ha coinvolto positivamente gli alunni.	
Annotazione del procedimento e delle strategie	È stata una fase complessa. Considerata la difficoltà, si sono invitati gli alunni ad esporre prima oralmente il procedimento seguito. Si sono poi sollecitati gli alunni a compilare apposite tabelle, fornite dall'insegnante, a tappe, cercando di motivare la scelta di ogni tappa.	Inizialmente stupiti della richiesta di motivare i vari passaggi, si sono organizzati per la ricerca di una metodologia efficiente. (Come indicare una cella della griglia in modo veloce?)

Interessante la discussione scaturita inerente

- l'efficacia della notazione ed in generale riguardo alla simbologia
- il perché il quesito dei grattacieli è un gioco matematico: da qui la considerazione della presenza di condizioni ed ipotesi … "proprio come nei problemi che troviamo sul libro di testo!"

Croci greche

Sistemiamo in una scacchiera quadrata 8×8 delle tessere a forma di croce simmetrica come quella in figura, formate dall'accostamento di 5 quadrati di dimensione identica alle celle della scacchiera, in modo che:



ciascuna di esse vada a coprire esattamente (sovrapponendovisi) 5 delle 64 caselle della scacchiera;
le tessere non si sovrappongano, ma possano toccarsi e toccare il bordo della scacchiera.
Quante tessere può ospitare al massimo la scacchiera?

Il gioco ha appassionato e coinvolto i ragazzi. Interessante è stato discutere riguardo al numero delle soluzioni: la giustificazione del fatto che non si possano inserire più di 8 croci non è stata molto facile. Più semplice invece, in questo gioco, l'annotazione dei vari casi.

Per i giochi di scacchiera, è stato utile avere a disposizione del materiale già predisposto, come scacchiere, croci, pedine o altro.

Altri giochi

Età

Marco, che sta aggiornando sulla sua vita un amico che non vede da anni, gli dice: “ho avuto tre figlie, nate tutte in maggio; il prodotto delle loro età è 36 e la somma delle loro età è il numero che vedi su quella casa gialla lì all’angolo. Indovina: quanti anni ha ciascuna delle mie figlie?”. L’amico riflette un attimo e dice: “veramente mi manca un dato”. E l’altro subito aggiunge: “è vero, dimenticavo di dire che la più grande ha gli occhi azzurri”. A quel punto l’amico dice le tre età esatte. Quanti anni hanno le tre figlie di Marco?

Soluzione: Sappiamo che il prodotto delle età è 36, quindi le età potrebbero essere quelle riportate nella seguente tabella, dove vengono visualizzate anche le rispettive somme:

Età con prodotto uguale a 36	*Somma delle tre età*
1; 1; 36	1+1+36 = 38
1; 2; 18	1+2+18 = 21
1; 3; 12	1+3+12 = 16
1; 4; 9	1+4+9 = 14
1; 6; 6	1+6+6 = 13
2; 3; 6	2+3+6 = 11
2; 2; 9	2+2+9 = 13
3; 3; 4	3+3+4 = 10

Se conoscendo la somma delle età non posso stabilire in quali di questi casi sono, significa che la somma delle età è condivisa da almeno due situazioni (vedi tabella).

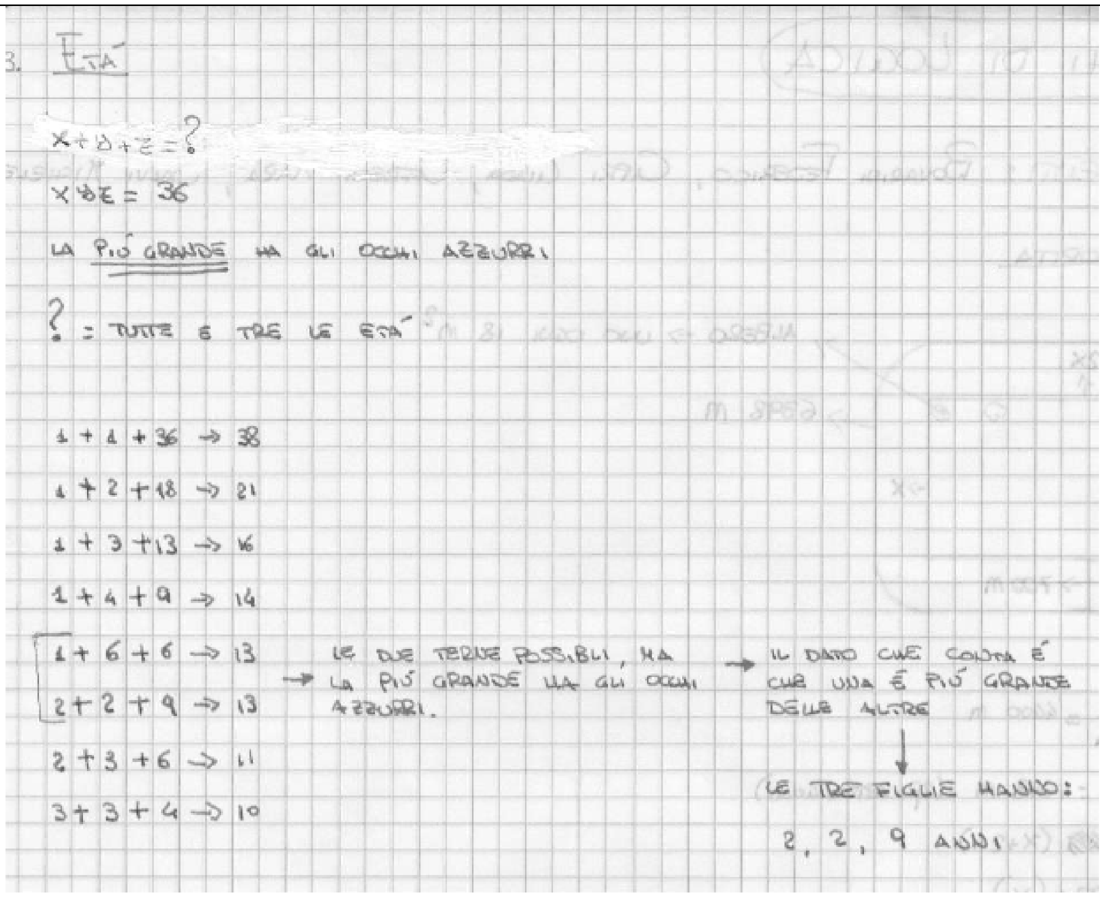
Quindi i casi possibili sono: 1; 6; 6 oppure 2; 2; 9.
Nel primo caso avrei due figlie maggiori, nel secondo caso una figlia maggiore: poiché si ha l’informazione che esista una figlia maggiore, si conclude che le età sono 2; 2; 9.

Per questo quesito mi sembra interessante mettere direttamente a confronto difficoltà ed osservazioni inerenti le classi terze del liceo delle scienze sociali e la classe prima del liceo scientifico.

Alunni delle classi terze del liceo delle scienze sociali	*Alunni classe prima e seconda liceo scientifico*
Hanno trovato difficoltà a distinguere i dati utili e si sono dovuti sollecitare ad ulteriori letture ed analisi del testo. Si è fatto notare, tra l’altro, la certezza dell’esistenza della soluzione, messa in discussione da qualcuno: il testo afferma che l’amico riesce a determinare l’età delle ragazze.	Hanno discusso sui dati utili e in piena autonomia li hanno classificati e riordinati
Si sono dovuti guidare per l’impostazione della strategia risolutiva. Il primo passo (elenco delle terne con prodotto 36) è stata un’utile occasione di ripasso e revisione della scomposizione in fattori di un numero e in particolare dell’unicità o meno della scomposizione a seconda che si faccia riferimento ai numeri primi o no	Hanno elaborato una strategia risolutiva, iniziando subito, in modo quasi spontaneo, ad elencare tutte le possibili terne di numeri naturali con prodotto 36, spiegando perché se ne trovano in numero finito, con riferimento alla scomposizione in fattori.

Alunni delle classi terze del liceo delle scienze sociali	*Alunni classe prima e seconda liceo scientifico*
Elencate le possibili terne, si sono dovuti sollecitare gli alunni alla rilettura del testo alla ricerca delle informazioni già utilizzate e di quelle ancora da utilizzare e utili.	Tra le terne determinate, hanno selezionato quelle utili, facendo costante riferimento alle informazioni fornite dal testo (riletto più volte) e sono pervenuti autonomamente alla soluzione.
Si sono invitati gli studenti a rivedere e schematizzare i vari passaggi effettuati per la risoluzione del problema, cercando di individuare le informazioni via via necessarie e l'informazione che permette di risolvere il problema in modo univoco. Dopo questa analisi, i ragazzi hanno riconosciuto l'importanza del testo, inizialmente letto e/o analizzato un po' superficialmente.	Hanno risposto, con motivazione esauriente, alla domanda: quale informazione mi permette di risolvere il problema in modo univoco?

Esempio di schematizzazione della soluzione, prodotto da un gruppo



L'enigma dei cappelli
Tre uomini bendati si trovano in fila, uno dietro all'altro. Vengono tolti tre cappelli da una scatola che ne contiene tre rossi e due neri. Questa informazione viene comunicata ai tre uomini. Poi i cappelli vengono fatti indossare ai tre uomini e viene loro tolta la benda. A ciascun uomo viene chiesto di indovinare il colore del cappello che indossa senza girarsi. L'ultimo della fila, che vede gli uomini che gli stanno davanti e i loro cappelli, dice: "Non so di quale colore sia il cappello che indosso". L'uomo davanti a lui, che ha udito la risposta del primo e vede l'uomo che gli sta davanti, dice: " So qual è il colore del cappello che indosso". Qual è questo colore?

Soluzione
Se l'ultimo uomo della fila, vedendo i cappelli degli uomini davanti a lui, afferma di non sapere il colore del proprio cappello, significa che gli uomini davanti non indossano entrambi un cappello nero. Quindi il terzo uomo potrebbe veder davanti a sé una della seguenti situazioni:

posizione uomini: il terzo vede sia il primo che il secondo, il secondo vede solo il primo	colore del cappello		
	caso 1	caso 2	caso 3
primo	**Rosso**	**Nero**	**Rosso**
secondo	**Rosso**	**Rosso**	**Nero**
terzo	?	?	?

Ora: l'uomo centrale, cioè il secondo uomo della fila, afferma di sapere il colore del suo cappello. È giunto alla conclusione tenendo in considerazione ciò che vede e quanto è stato detto dal terzo uomo.
Se l'uomo davanti a lui avesse un cappello rosso (caso 1 e caso 3), il secondo uomo avrebbe ancora il dubbio di quale cappello avere in testa.
Se quello davanti è nero allora il secondo uomo sa che sicuramente il cappello che indossa è rosso (infatti, se anche il suo fosse nero il terzo uomo avrebbe già dato una risposta certa…).

Il quesito è stato risolto più rapidamente dagli studenti che hanno saputo rappresentare graficamente le soluzioni o che hanno saputo teatralizzare la situazione: la visualizzazione dei casi possibili ha facilitato un ragionamento e un'analisi condotta in gruppo e non singolarmente. Un po' più complessa è stata la formalizzazione del ragionamento e della strategia seguiti.

Il foglio strappato
Immagina di avere un foglio di giornale dello spessore di 1/500 cm. Taglialo a metà e metti le due parti una sull'altra. Dividi ora a metà i due fogli ottenuti e metti una metà sull'altra. Continua poi a tagliare in due, per 50 volte in tutto. Se tu volessi salire sulla pila di carta che hai costruito, di quanto pensi di poterti innalzare?

Soluzione
Contiamo quanti pezzi di carta si hanno dopo ogni suddivisione:

n° di suddivisioni	N° di pezzi
1	2
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^3$
………	……..

Quindi alla cinquantesima suddivisione il numero di pezzi sarà pari a: 2^{50}.

Perciò lo spessore finale sarà pari a: $2^{50} \cdot \frac{1}{500}$ cm che sono più di 22 milioni di chilometri.

La prima strategia scelta per la soluzione del quesito è stata quella pratica: gli alunni hanno preso un foglio ed hanno iniziato a fare le suddivisioni, accorgendosi presto che sarebbe stato impossibile continuare per ben 50 volte. Come procedere allora? Qualcuno si è messo a contare i pezzi di carta ottenuti dopo ogni strappo, ma anche in tal modo, si sono accorti che diventava un po' difficile tenere il conto e i numeri divenivano presto piuttosto grandi.

Finalmente qualcuno si è ricordato di quanto avessi continuamente insistito sull'utilità dell'annotazione del procedimento: inizialmente non è sembrato così utile. Sollecitati ad analizzare le prime annotazioni, così da individuare una scrittura efficace (utilizzo delle potenze) sono poi risaliti alla risoluzione.

Più difficoltosa l'analisi dell'ordine di grandezza del numero ottenuto.

FORMAGGETTE

Due pastori hanno portato con sé rispettivamente 5 e 3 formaggette di ugual valore: li incontra un contadino che chiede di mangiare con loro. I tre si ripartiscono ugualmente le formaggette e il contadino lascia in pagamento 24 uova. I due pastori vogliono spartirsi le uova equamente, nella misura in cui ciascuno ha contribuito al pasto del contadino. Quante uova toccano a ciascuno dei due pastori?

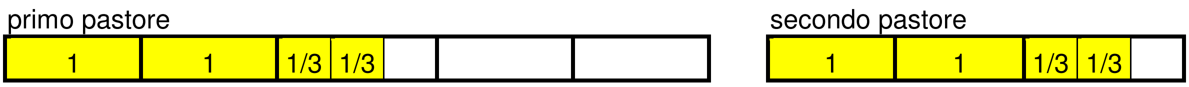
<u>*Soluzione*</u>

Definiamo innanzitutto quanto ha consumato ciascuno dei tre: le 8 formaggette sono state divise in tre parti uguali, quindi:

$$\frac{8\,formaggette}{3} = \frac{8}{3} = \frac{6+2}{3} = \frac{6}{3} + \frac{2}{3} = 2 + \frac{2}{3}$$

quindi ciascuno dei tre ha consumato 2 formaggette e 2/3.

Vediamo ora in qual misura ciascun pastore ha contribuito al pranzo del contadino:



il primo pastore mangia 2 e 2/3 delle cinque formaggette che ha portato, quindi ne lascia 2 e 1/3 a disposizione del contadino;

analogamente il secondo pastore mangia 2 e 2/3 delle 3 formaggette che ha portato e ne lascia 1/3 per il contadino (vedi figura).

Quindi il secondo pastore contribuisce per 1/8 del pasto del contadino e di conseguenza gli spetta un ottavo delle uova, cioè 3 uova, mentre al primo pastore ne spettano 21.

Anche per questo quesito, si riporta in tabella un confronto tra gli alunni di scuole diverse.

	Alunni classi terze liceo delle scienze sociali	*Alunni classe prima e seconda liceo scientifico*
Comprensione del testo	Si sono dovuti sollecitare gli alunni a riflettere sul significato del termine “equamente” e sulla sua importanza per la corretta risoluzione.	Immediata la discussione riguardo al significato di “equamente” perché considerato essenziale per la risoluzione.
Difficoltà	Notevole la difficoltà nel giungere alla soluzione, in particolare nell’ultima parte inerente la determinazione in frazione del contributo di ciascuno al pasto del contadino	La risoluzione non è stata immediata, ma ha presentato qualche difficoltà. Gli alunni sono stati sollecitati a riflettere sulle suddivisioni e su quanto si era inizialmente detto riguardo a “equamente”
Gradimento	Sebbene difficile, il quesito è stato apprezzato dai ragazzi. Probabilmente visto come una sfida, il quesito ha coinvolto e appassionato.	Il quesito è stato apprezzato.
Strategie	Immediata la visualizzazione della situazione mediante un disegno. Qualcuno ha utilizzato dei pezzi di carta per rappresentare le varie suddivisioni.	Utilizzata la rappresentazione della situazione con disegni e grafici.

2.2 Confronto tra alunni di scuole diverse

A conclusione delle due diverse esperienze, una con le mie classi del liceo delle scienze sociali e l’altra con le classi del liceo scientifico, mi pare interessante raccogliere in una tabella osservazioni di confronto riguardo alle difficoltà riscontrate dagli alunni dei due diversi indirizzi.

L’appartenenza a tipologie diverse di scuole, rivela abilità e competenze diverse, modi diversi di procedere nell’analisi e nella risoluzione di situazioni problematiche che si accentuano tenendo conto della differenza di età considerata.

<table>
<tr><th>Osservazioni inerenti a:</th><th>Alunni classi terze liceo delle scienze sociali</th><th>Alunni classe prima liceo scientifico</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Strategie utilizzate</td><td>• la strategia della teatralizzazione è stata molto utilizzata sia per la comprensione del quesito, sia per l'impostazione della strategia risolutiva
• le strategie precedentemente utilizzate, per la risoluzione di altri quesiti, non sono sempre stati tenuti presenti e spesso l'insegnante ha dovuto richiamare l'attenzione su eventuali analogie</td><td>• Pur utilizzando per alcuni quesiti la strategia della teatralizzazione, l'approccio è stato di carattere più tecnico
• Strategie e metodologie utilizzate per la risoluzione dei diversi quesiti, sono state via via integrate e considerate come bagaglio utile per la risoluzione dei quesiti successivi</td></tr>
<tr><td colspan="2">Si sono dovuti sollecitare gli alunni alla scomposizione dei problemi in problemi più semplici</td></tr>
<tr><td>Annotazione dei procedimenti</td><td>• Difficoltoso l'utilizzo di grafici e tabelle per l'impostazione della strategia risolutiva
• La schematizzazione del procedimento, si è sempre dovuta sollecitare e si è rivelata, per gli alunni, la parte più pesante da svolgere. D'altro canto, convincere gli alunni di quanto importante sia l'annotazione dei vari passaggi, logici e non, eseguiti, non è stato semplice per l'animatore. È sembrato comunque più efficace, anche se non in termini di tempo, convincere piuttosto che obbligare.</td><td>• Per gli alunni è stato gradualmente sempre più spontaneo far riferimento a schemi, grafici e tabelle per impostare e sviluppare le strategie risolutive
• La schematizzazione del procedimento, poco spontanea inizialmente, è stata poi gestita in autonomia</td></tr>
</table>

Osservazioni inerenti a:	*Alunni classi terze liceo delle scienze sociali*	*Alunni classe prima liceo scientifico*
Gruppi	Una volta costituiti i gruppi in modo equilibrato, i vari componenti hanno lavorato, collaborando alle diverse attività. È stato comunque interessante sperimentare tipologie diverse di gruppi.	Nel corso dei vari incontri è gradualmente aumentata la collaborazione tra i vari componenti del gruppo: ogni componente è riuscito a "ritagliarsi" un ruolo.
	Anche gli elementi deboli del gruppo una volta acquisita sicurezza hanno collaborato alle attività in modo particolare, senza fornire proposte nuove, ma piuttosto avanzando dubbi e domande di analisi sulle possibili soluzioni proposte. In tal modo, attraverso successive "rettifiche", prove, correzioni, riprove, il gruppo, compatto, ha raggiunto le conclusioni richieste.	
Relazione con l'animatore	I vari gruppi hanno inizialmente richiesto all'animatore suggerimenti per la scelta della strategia: si è cercato di guidare, più che suggerire, verso osservazioni e metodologie utili all'individuazione autonoma della strategia risolutiva corretta. Per alcuni gruppi non è stato semplice accettare che l'animatore non fosse suggeritore della soluzione ma solo guida… Soprattutto nel corso dei primi incontri il ruolo dell'animatore è stato anche quello di coinvolgere tutti i componenti del gruppo.	Tra gruppo e animatore si è creato un buon rapporto di confronto. In generale il gruppo ha accettato e in un certo senso ricercato con interesse le "provocazioni" e le domande proposte dall'animatore. Nel corso dei vari incontri, l'animatore è stato via via considerato sempre più come ascoltatore e commentatore delle varie strategie utilizzate.

2.3 Considerazioni conclusive

Il percorso attuato si è rivelato globalmente positivo anche se molto impegnativo per l'insegnante, soprattutto a livello organizzativo: l'organizzazione prevista dal PLS consente un impegno più concentrato nel tempo e tra l'altro, anche una valutazione forse più immediata delle ricadute sulle attività didattiche.

Il percorso sarebbe stato migliore, in organizzazione e forse anche in efficacia, se fosse stato condiviso per intero con altre classi: sarebbe stato in tal modo possibile un confronto diretto soprattutto degli effetti prodotti sulle classi in generale e sui singoli alunni. Quest'anno non è stato possibile in particolare per una motivazione legata ai tempi, nel futuro sarebbe interessante riuscire a coinvolgere più classi e riorganizzare il progetto prevedendo anche attività trasversali ad altre discipline.

2.3.1 Ricadute generali

Al termine dell'anno scolastico, ho proposto alle due classi una sorta di questionario (che propongo ogni anno nelle classi in cui insegno) riguardo all'attività didattica svolta in matematica. Le domande erano di carattere generale e richiedevano osservazioni inerenti i contenuti affrontati, grado di difficoltà riscontrato, tipologie di difficoltà, osservazioni sulle metodologie utilizzate nel corso delle lezioni,…

I questionari potevano essere compilati in forma anonima e infatti solo due studenti hanno messo la firma.

Tra i vari commenti, ho frequentemente ritrovato (più dell'80 %) il riferimento al percorso sui giochi matematici: gli alunni hanno apprezzato l'iniziativa anche se hanno ammesso di aver trovato a volte pesante il dover motivare la risoluzione e/o descrivere i passaggi svolti.

Sebbene "pesante", penso che richiedere con insistenza e convinzione la motivazione delle strategie utilizzate, sia stato proficuo: ha indotto gli alunni a riflettere in modo critico su ciò che si era fatto e a verificare anche le proprie capacità di schematizzare, esporre e farsi comprendere.

Gli obiettivi prefissati all'inizio dell'attività (cfr. paragrafo 2.1.3) sono stati raggiunti e potrebbero essere affinati.

Sicuramente alcuni contenuti non sono stati approfonditi come invece si potrebbe fare in altri indirizzi di scuola: l'utilizzo dei giochi matematici, permette vari gradi di approfondimento e diverse modalità e finalità di utilizzo. Sarebbe comunque riduttivo pensare ai giochi solo come momento ludico e di svago fine a se stesso.

Interessante sarebbe pensare ad un percorso trasversale, con altre discipline, in cui inserire i giochi matematici come occasione di analisi del testo e analisi di situazioni problematiche.

Allegato 1 Test cloze: Tangenti ad una parabola

<u>Svolgi il seguente esercizio</u>:

Conduci dal punto $P\left(\frac{3}{2};2\right)$ le rette tangenti alla parabola di equazione $y=-x^2+6x-5$.

Determina le coordinate dei punti di tangenza.

Completa il seguente testo relativo al procedimento per determinare le rette tangenti a una parabola:

Se una retta e una parabola sono tangenti, il sistema formato dalle loro equazioni ha due soluzioni coincidenti. Ciò significa che l'equazione risolvente del sistema è di secondo grado e ha discriminante uguale a zero.

Consideriamo una parabola con asse parallelo all'asse *y*.

Supponiamo di dover determinare le rette passanti per un punto $P(x_0, y_0)$ e tangenti alla parabola di cui è nota l'equazione.

- Si scrive l'equazione _____ retta generica, passante per ____ punto P, che è:

  $$\_\_\_ - y_0 = m(\_\_\_\_ - x_0) \qquad (1)$$

  in tale _________ x_0 e y_0 sono _____, mentre non si conosce ___ parametro *m*.
- Si pone ___ sistema l'equazione della _______ con l'equazione (1) ___ si ricava, mediante il _______ di sostituzione, l'equazione _______ il sistema. Tale equazione ________ il parametro *m*.
- Si ________ il discriminante Δ dell'________ risolvente: esso è un'_________ contenente il parametro *m*.
- ___ scrive e si risolve ____'equazione $\Delta = 0$ (_______ di tangenza). L'incognita ____ questa equazione è il ___________angolare *m*.

  Si possono ___________ diversi casi:

1. Se l'equazione _____ $= 0$ è di ______ grado e il suo ___________ è negativo, l'equazione _____ ha soluzioni: non vi _______ tangenti alla parabola passanti ______ P. Ciò accade se _____ è interno alla parabola.
2. ___ l'equazione $\Delta =$ ___ è di secondo grado _____ il suo discriminante è _____, l'equazione ha due soluzioni ________ $m_1 = m_2$: esiste _____ sola tangente alla parabola __________ per P. Ciò accade ____ P è un punto ______ parabola.
3. Se l'equazione Δ __ 0 è di secondo _______ con discriminante positivo, allora ________ due soluzioni distinte m_1 e ____: vi sono due tangenti _____ parabola passanti per P. _____ tal caso P è ____ punto esterno alla parabola. _____ equazioni delle tangenti si _______ sostituendo nella (1) i ______ di m_1 e m_2 ____________.

Testo tratto da N. Dodero, P. Baroncini, R. Manfredi, *Formazione alle matematica*, vol D2, Ghisetti e Corvi Editore.

Come si procede per determinare le coordinate dei punti di tangenza? Spiega.

………

………

………

………

……………………………………………………

Quanti punti di tangenza si possono determinare? Spiega.

………

………

………

………

……………………………………………………

Allegato 2 Test cloze: la circonferenza

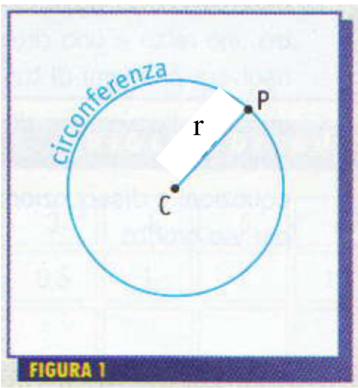
EQUAZIONE DELLA CIRCONFERENZA

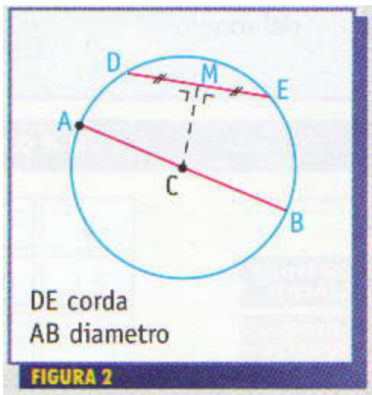
Definizione: **la circonferenza è il luogo dei punti di un piano che hanno la stessa distanza, detta raggio, da un punto fisso detto centro.**

La circonferenza è una ________ chiusa, diversamente dalla parabola ______ è una linea aperta.

____ P è un punto _______ circonferenza e C è _____ centro (figura 1), il segmento CP ____ un raggio. La circonferenza _______ infiniti raggi tutti tra ________ congruenti e quindi della _________ lunghezza: per questo motivo ____ parla di raggio della _________________ e si indica con ___.

La _________ è un segmento i _____ estremi appartengono alla circonferenza. _____ diametro è una corda ___________ per il centro della _______________: la lunghezza del diametro ____ il doppio della lunghezza ______ raggio. Gli estremi di _____ diametro di una circonferenza _______ punti diametralmente opposti.





In figura 2 è disegnata una corda ______ e un diametro AB; ____ punti A e B ______ diametralmente opposti.

Nel piano ____________ una circonferenza è individuata __________ conosciamo le coordinate (x_0, ___) del suo centro C e _____ misura r del suo ________.

Indichiamo con P(___, y) un generico punto ______ circonferenza di centro C(__, y_0) e raggio r (figura 3). ____ punto P appartiene alla circonferenza _____ e solo se

$$PC \ldots\ldots\ldots r \quad \text{e quindi} \quad \sqrt{(\_\_\_ - x_0)^2 + (\_\_\_\_\_ - y_0)^2} = \_\_\_\_$$

Da cui

$$(x - x_0)^2 \_\_\_\_\_ (y - y_0)^2 \_\_\_\_ r^2 \qquad (1)$$

La (1) è quindi ____equazione della circonferenza di _______ C(x_0, y_0) e ________ r. Nel caso particolare ___ cui il centro C ________ con l'origine O(0,___) del sistema di riferimento, ___ ha $x_0 = y_0$ _____0 e quindi l'________ diventa:

$$x^2 + \_\_\_\_^2 = r^2$$

_____ è l'equazione della __________ con centro nell'origine ___ raggio r (figura 4).

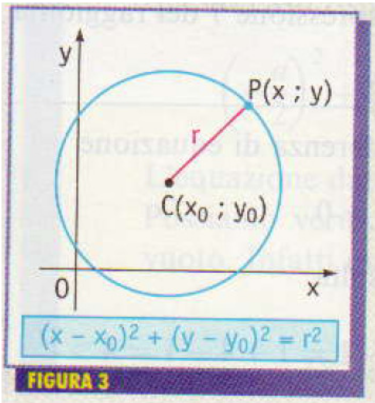


FIGURA 3

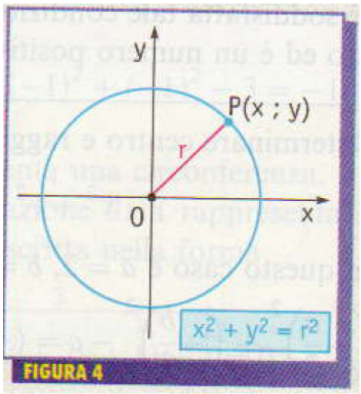


FIGURA 4

Testo tratto da:
N. Dodero, P.Baroncini, R. Manfredi, *Formazione alla matematica*, vol. D2, Ghisetti e Corvi Editori

Allegato 3 La legge dello sdoppiamento

LEGGE DELLO SDOPPIAMENTO

TEOREMA

L'equazione della tangente ad una circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, in un suo punto $P(x_0, y_0)$ è:

$$x_0 x + y_0 y + a\frac{x + x_0}{2} + b\frac{y + y_0}{2} + c = 0$$

cioè si ottiene dall'equazione della circonferenza sostituendo in essa, rispettivamente:

x^2 con $x_0 x$ $\qquad$ y^2 con $y_0 y$ $\qquad$ x con $\frac{x + x_0}{2}$ $\qquad$ y con $\frac{y + y_0}{2}$

Rispondi:

1) A cosa serve la legge dello sdoppiamento?

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

2) Riformula il teorema nella forma:

"se …………………….. allora …………………………."

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

3) In quali dei seguenti casi puoi applicare il teorema? Spiega.

a) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 2 = 0$ $\qquad$ $P(3,-1)$
b) $x^2 + y^2 - 6x + y - 4 = 0$ $\qquad$ $P(2,3)$
c) $x^2 + y^2 = 25$ $\qquad$ $P(0,5)$

4) Data la circonferenza di equazione: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 8 = 0$, determina l'equazione della tangente alla circonferenza nel suo punto $P(1,1)$.

Le formule di sdoppiamento si possono applicare, con le medesime ipotesi su P, anche ad altre curve di secondo grado: parabola, ellisse, iperbole. Tali formule si ottengono dall'equazione della curva stessa, lasciando inalterati i coefficienti e operando le sostituzioni indicate dal teorema enunciato inizialmente.

Ricava la legge dello sdoppiamento per le curve seguenti:

a) PARABOLA $y = ax^2 + bx + c$

b) ELLISSE $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Assegna dei valori ad *a*, *b*, *c* nel caso della parabola, scegli un opportuno punto P e applica la legge dello sdoppiamento.