NUMERI COMPLESSI

INTRODUZIONE E DEFINIZIONI

L'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni reali.
Invento un nuovo insieme numerico **C**, che contenga i numeri reali **R** e tale che in esso l'equazione abbia soluzione.
Ciò succede solo se in **C** esiste un "numero" il cui quadrato vale -1. Chiamo questo numero **unità immaginaria** e lo denoto con la lettera i. Per definizione

$$i^2 = -1.$$

L'insieme **C** dei **numeri complessi** è formato da tutte le possibili espressioni della forma $a + ib$ ove a e b sono numeri reali e i è l'unità immaginaria.
Se $z = a + ib$ chiamo **parte reale** di z il numero reale a e **parte immaginaria** di z il numero reale b e scrivo

$$a = \mathrm{Re}(z), \qquad b = \mathrm{Im}(z).$$

Definizioni. Considero due numeri complessi $z = a + ib$, $w = c + id$.

1) Definisco **uguali** z, w se hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria:
$$a = c \qquad \text{e} \qquad b = d.$$
2) Definisco **somma** di z e w il numero che ha per parte reale la somma delle parti reali e per parte immaginaria la somma delle parti immaginarie:
$$z + w = (a + c) + i(b + d).$$
3) Definisco **prodotto** di z e w il numero complesso:
$$z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc)$$
che ottengo facendo il prodotto dei due polinomi in i: $(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd$ e ricordando che $i^2 = -1$.

Per la somma e il prodotto di numeri complessi valgono le usuali proprietà delle operazioni. Inoltre:

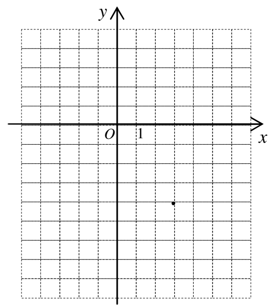
A) il numero complesso $z = 0 + 0i$ ha la proprietà: "per ogni numero w risulta $z + w = w$"; lo chiamo **zero** di **C** e lo denoto con 0;
B) il numero complesso $u = 1 + 0i$ ha la proprietà: "per ogni numero w risulta $u \cdot w = w$"; lo chiamo **unità** di **C** e lo denoto con 1;
C) il numero complesso $w = -a + i(-b)$ sommato a z dà 0: lo chiamo **opposto di** z e lo denoto con $-z$;
D) chiamo il numero complesso $\bar{z} = a + i(-b)$, in cui rispetto a z cambia solo il segno della parte immaginaria, **coniugato di** z: esso è tale che $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ è un numero reale, che vale 0 se e solo se $z = 0$;
E) se $z = a + ib$ non è lo zero di **C**, $z \cdot \dfrac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = 1$; quindi $\dfrac{\bar{z}}{a^2 + b^2} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + i \cdot \dfrac{-b}{a^2 + b^2}$ è il **reciproco di** z e lo denoto con $\dfrac{1}{z}$.

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI

Ogni numero complesso $z = a + ib$ è in corrispondenza biunivoca una coppia ordinata di numeri reali (a, b), che a sua volta – fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel piano – è in corrispondenza biunivoca con un punto del piano. Quindi posso rappresentare ogni numero complesso $z = a + ib$ come punto del piano di ascissa $\mathrm{Re}(z) = a$ e ordinata $\mathrm{Im}(z) = b$.
Il piano pensato come rappresentazione di **C** viene detto **piano di Argand – Gauss**.

- Sull'asse x si trovano i numeri complessi della forma $z = a + 0i = a$, cioè i reali ➔ l'asse x viene detto **asse reale**.
- Sull'asse y si trovano i numeri complessi della forma $z = 0 + ib = ib$, cioè i cosiddetti **immaginari puri** ➔ l'asse y viene detto **asse immaginario**.

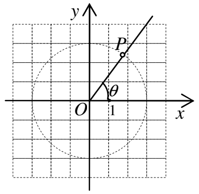
ESERCITAZIONE GUIDATA – Osserva la figura



1) Che numero rappresenta l'origine del sistema di riferimento? …………………….
2) Dove si trova l'unità di **C**? e l'unità immaginaria i? ……………………………………………………..……..
……………………………………………………………………
3) In figura vedi il punto che rappresenta sul piano di Argand Gauss il numero complesso $z = 3 - 4i$: disegna i punti che rappresentano $-z$ e $\bar{z}$.
4) Somma i a $z = 3 - 4i$: $z + i =$ ……….. e riporta il numero nel piano di Argand – Gauss.
Ripeti per le seguenti somme: $z + \bar{z} =$ ……………………; $z - \bar{z} =$ ……………………..
Questi esempi suggeriscono che:
sommare il numero complesso $w = \mathrm{Re}(w) + i\,\mathrm{Im}(w)$ al numero complesso $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$ equivale a fare una trasformazione geometrica sul punto $P = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ che rappresenta z.
Quale? …………………………………………………
Infatti …………………………………………………
5) Qual è la distanza del punto che rappresenta $z=3 - 4i$ dall'origine del sistema di riferimento? ……......

Se $z = a + ib$ il numero reale non negativo $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ viene detto **modulo di** z e rappresenta ……………………………………………

FORMA TRIGONOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI



Ogni punto $P = (a, b)$ diverso dall'origine nel piano di Argand – Gauss può essere individuato assegnando la sua distanza r dall'origine O e la misura dell'angolo θ compreso tra il semiasse positivo delle ascisse e la semiretta OP.

Si ha: $a = r\cos\theta$ e $b = r\,\text{sen}\,\theta$. Quindi

$$z = a + ib = r\cos\theta + i\,r\,\text{sen}\,\theta = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

Chiamo

$z = a + ib$: forma ***algebrica*** del numero complesso z

$z = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$: forma ***trigonometrica*** del numero complesso z

θ : argomento del numero complesso z

Assegnare un numero complesso in forma trigonometrica significa mettere in evidenza il suo modulo e **un** suo argomento.

Spunti per discussioni ulteriori

SCOMPONIBILITÀ DI POLINOMI

Esistenza di k radici k-esime per ciascun numero complesso (*vedi quesiti pagina 6*).

L'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni reali significa che $x^2 + 1$ non si può scrivere come prodotto di due polinomi a coefficienti reali entrambi di grado minore di due. Anche $x^4 + x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni reali: sarà vero anche in questo caso che $x^4 + x^2 + 1$ non si può scrivere come prodotto di due polinomi a coefficienti reali entrambi di grado minore di quattro?

Qual è il massimo intero positivo k tale che esista un polinomio a coefficienti reali di grado k che non si può scrivere come prodotto di due polinomi a coefficienti reali entrambi di grado minore di k?

Il teorema fondamentale dell'algebra e sue conseguenze sui polinomi a coefficienti reali.

ALLA SCOPERTA DI INFINITE TERNE PITAGORICHE (*vedi pagine 7 – 9*)

ESERCITAZIONE INDIVIDUALE Cognome……………………………………… Nome……………………

1) Trova la parte reale e la parte immaginaria dei due numeri complessi $(1 + i)(1 - i)$ e di $(1 + i)^2$

z	**Re**(z)	**Im**(z)
$(1 + i)(1 - i) =$		
$(1 + i)^2 =$		

2) Se $(a + ib)(-1 + i) = 1$ quanto valgono a e b? a =………, b = ………. poiché

…………………………………………………………………………………………….

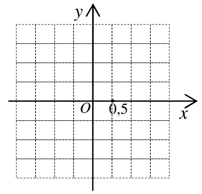
3) $\dfrac{1}{-1+i}$ è un numero complesso? ……………

Se hai risposto sì trovane parte reale e parte immaginaria a =………, b = ……….

Se hai risposto no, spiega brevemente perché.

…………………………………………………………………………………………

4) Calcola e rappresenta nel piano di Argand – Gauss le potenze di i fino alla quarta:



i^1 =………, i^2 =………, i^3 =………, i^4 =………

In generale al variare di k negli interi positivi quanto vale i^k?

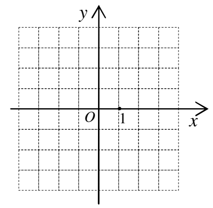
Se $k = 4n$ vale ……, ……………………………….…………………

……………………………………..

I punti corrispondenti alle prime quattro potenze individuano una figura geometrica nota? ……………………..

5) Rappresenta nel piano di Argand – Gauss i due numeri complessi $z = 2 - i$ e $w = 2i$ e chiama A e B i punti corrispondenti. Poi calcola e rappresenta:

$-z =$
$\bar{z} =$
$z - w =$
$z \cdot w =$



6) Calcola il modulo dei numeri z, w, $z \cdot w$ del quesito precedente:

$|z|$ = …………., $|w|$ = ………………., $|z \cdot w|$ = ……………..….

Che cosa noti? ………………………………………………………………………………

Chiama C il punto che rappresenta $z \cdot w$. Qual è la misura dell'angolo formato dai segmenti OA e OC? ……….

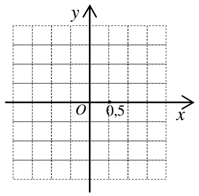
7) Tenendo conto di quanto visto nel quesito 4 e nel quesito 6, il "prodotto per i" di un numero z quale trasformazione geometrica potrebbe rappresentare? ………………………………..

Verifica la tua congettura (*puoi aiutarti con una figura*):

– calcola $(a + ib) \cdot i$ = ……………….……………….... Quanto vale il suo modulo?…………
– quali sono i coefficienti angolari delle due rette passanti per l'origine O e per i due punti P e Q che rappresentano rispettivamente $a + ib$ e $(a + ib) \cdot i$? m_P =……., m_Q =…….
– quindi, quanto misura l'angolo POQ? …………

8) Rappresenta nel piano di Argand – Gauss i numeri complessi $z = \sqrt{3} + i$, $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ e $z \cdot w$

e chiama A, B e C i punti corrispondenti. Poi



- calcola i loro moduli

$|z| =$, $|w| =$, $|z \cdot w| =$

- trova le misure α, β, γ degli angoli formati rispettivamente dai segmenti OA, OB, OC con il semiasse delle x positive e quella $\gamma - \alpha$ dell'angolo formato da OA e OC

$\alpha =$, $\beta =$, $\gamma =$, $\gamma - \alpha =$

Che cosa noti circa il modulo del prodotto? …………………………………….

Che relazione c'è tra le misure α, β, γ? …………………………………………

Che cosa rappresentano le misure α, β, γ nella forma trigonometrica dei tre numeri complessi? …………………………………………………….

Dopo aver svolto i quesiti da 4 a 8 che congettura puoi fare circa il significato del prodotto di un numero complesso $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ per un altro $w = R(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$?

……………………………………………………………………………………………

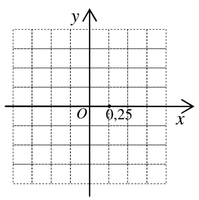
……………………………………………………………………………………………

Quesito 9

Considera il numero $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ del quesito 8 e completa la tabella calcolando le sue potenze successive ed il suo reciproco:

w	w^2	w^3	w^4	w^5	w^6	$\frac{1}{w}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$			$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$		1	

Ora rappresentali nel piano di Argand – Gauss: dove si trovano i punti corrispondenti?



Che cosa noti sul reciproco? …………………………………………………

Sia k un intero positivo.

Chiamo **radice k – esima** di un numero complesso z un numero complesso y tale che $y^k = z$.

Si dimostra che ogni numero complesso non nullo ha k radici k – esime a due a due diverse (*).

- È vero che $-i$ è una radice quarta di 1 e perché? …………………………………………

  È anche una radice quadrata di 1 e perché? ……………………………………………

Considera il numero complesso $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

- È vero che w è una radice sesta di 1 e perché? …………………………………………

  È anche una radice terza di 1 e perché? ……..……………………………………………..

- È vero che w^4 è una radice sesta di 1 e perché? ………………….………………………

  È anche una radice terza di 1 e perché? ……..……………………………………………………

- Qual è il più piccolo k tale che $(w^5)^k$ sia una radice k – esima di 1 e perché? ………………..

  ……………………………………………………………………………………………..

  ……………………………………………………………………………………………..

- Come deve essere n perché w^n sia una radice terza di 1? ……………………………………..

  ……………………………………………………………………………………………..

  E perché w^n sia una radice quadrata di 1? ……………………………

  ……………………………………………………………………………………………..

- Esistono n tali che w^n sia una radice decima di 1? ………………………………..

  ……………………………………………………………………………………………..

____

(*) Se $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, si deve trovare $v = R(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$ in modo che

(1) $$r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = [R(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)]^k$$

Ora $[R(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)]^k = R^k(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)^k$ ed è facile vedere che

$$(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)^2 = \cos(2\omega) + i \operatorname{sen}(2\omega)$$

e, in generale,

$$(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)^k = \cos(k\omega) + i \operatorname{sen}(k\omega)$$

Quindi (1) è vera se e solo se

$$r = R^k \quad \text{e} \quad \theta + 2n\pi = k\omega \quad \text{con } n \text{ intero qualsiasi}$$

ma (per la periodicità di seno e coseno) solo k dei numeri corrispondenti sono a due a due distinti.

Alla scoperta di infinite terne pitagoriche

La terna di interi (3,4,5) è pitagorica poiché $3^2 + 4^2 = 5^2$.

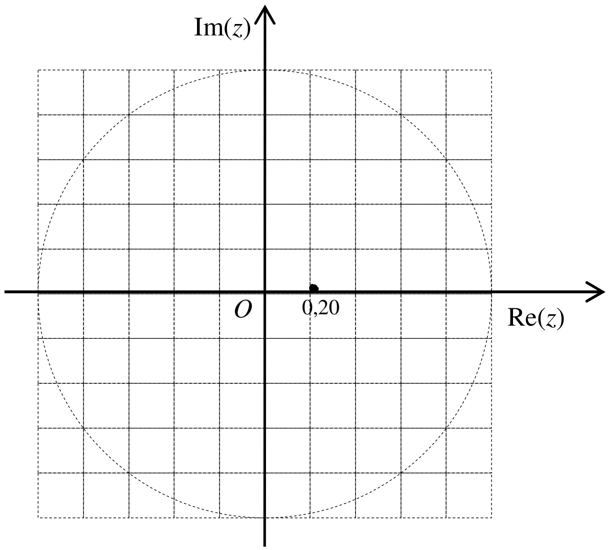
Trova il modulo del numero complesso $z = \frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$: ……………………………………….

Trova parte reale e parte immaginaria e modulo di z^2: $\mathrm{Re}(z^2)$ = …………………….., $\mathrm{Im}(z^2)$ = …………………., $|z^2|$ = ………………………

La terna $(\mathrm{Re}((5z)^2), \mathrm{Im}((5z)^2), |(5z)^2|)$ è ancora pitagorica. Come puoi verificarlo senza fare conti? …………………………………………………

……..

Come calcoleresti z^3 e più in generale z^n? …………………………………………………………………………………………



Puoi estendere alla terna $(\mathrm{Re}((5z)^n), \mathrm{Im}((5z)^n), |(5z)^n|)$ con n intero positivo qualsiasi le considerazioni che hai fatto quando n=2 e perché? ……………………………………….…………

……………………………………………..………………………………………………………………

……………………………………..………………………………………….…………………………

Rappresenta nel piano di Argand – Gauss z, z^2, z^3. Dove stanno questi punti?

……………………………………………………………..……………………………………………..

……………………………………………………………..……………………………………………..

Utilizza la tabella riportata nella pagina successiva per rappresentare sulla figura tutte le potenze di z fino alla settima. I punti che trovi sono tutti diversi? ....

Se consideri le successive potenze di z succede la stessa cosa? ……………………………………………………………………………..

potenza	Fattore I		Fattore II		Denominatore	Cifra unità di	Cifra unità di		
n	Re($(5z)^n$)	Im($(5z)^n$)	Re($(5z)^1$)	Im($(5z)^1$)	$\vert(5z)^n\vert$	Re($(5z)^n$)	Im($(5z)^n$)	Re(z^n)=cos θ	Im(z^n)=sen θ
1	3	4	3	4	5	3	4	0,6	0,8
2	-7	24	3	4	25	(-)7	4	-0,28	0,96
3	-117	44	3	4	125	(-)7	4	-0,936	0,352
4	-527	-336	3	4	625	(-)7	(-)6	-0,8432	-0,5376
5	-237	-3116	3	4	3125	(-)7	(-)6	-0,07584	-0,99712
6	11753	-10296	3	4	15625	3	(-)6	0,752192	-0,658944
7	76443	16124	3	4	78125	3	4	0,9784704	0,2063872
8	164833	354144	3	4	390625	3	4	0,42197248	0,90660864
9	-922077	1721764	3	4	1953125	(-)7	4	-0,472103424	0,881543168
10	-9653287	1476984	3	4	9765625	(-)7	4	-0,988496589	0,151243162
11	-34867797	-34182196	3	4	48828125	(-)7	(-)6	-0,714092483	-0,700051374
12	32125393	-242017776	3	4	244140625	3	(-)6	0,13158561	-0,99130481
13	1064447283	-597551756	3	4	1220703125	3	(-)6	0,871995214	-0,489514399
14	5583548873	2465133864	3	4	6103515625	3	4	0,914808647	0,403887532
15	6890111163	29729597084	3	4	30517578125	3	4	0,225775163	0,974179437

Dimostriamo nel seguito che, al variare di n, i punti individuati sulla circonferenza da z^n sono tutti diversi e quindi che è infinito l'insieme di terne pitagoriche

$$\{ (\mathrm{Re}((5z)^n), \mathrm{Im}((5z)^n), |(5z)^n|), \quad n \in \mathbf{N} \}.$$

Osserva:

nelle potenze riportate sopra, quali sono le cifre delle unità di Re($(5z)^n$)? ……….. ……………………; che legame c'è tra loro? ……………..

quali sono le cifra delle unità in Im($(5z)^n$)? ……………………… …………………… ; che legame c'è tra loro? ……………..

Verifica che le prime potenze di $5z$ possono essere rappresentate come $(10a + 3) + i\,(10b + 4)$ con a e b numeri interi eventualmente negativi:

Numero	$3 + 4i$	$-7 + 24i$	$-117 + 44i$	$-527 - 336i$	$-237 - 3116i$	$11753 - 10296i$	$76443 + 16124i$
a	0	–1	– 12				
b	0	2		– 34			

Adesso moltiplica:

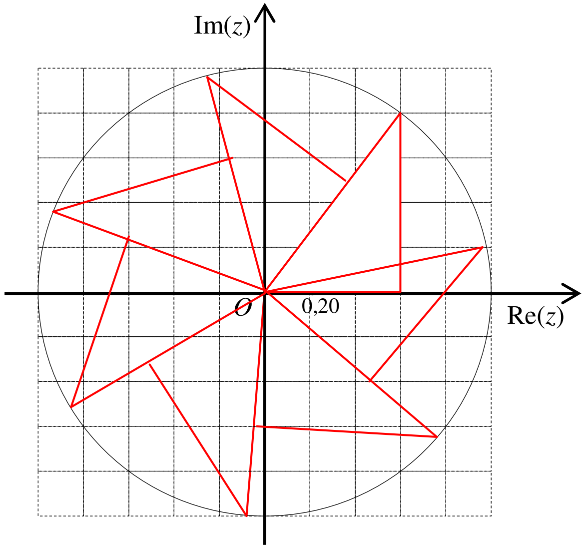
$[(10a+3) + i\,(10b+4)](3+4i) =$ ……………………………………………………………………………

$=$ ………………………………………………………………… $= [10(3a-4b-1)+3\,] + \mathrm{i}\,[(10(4a+3b+2)+4]$

Quindi se $(5z)^n$ ha quella forma, la ha anche $(5z)^{n+1}$.

Ne consegue che nessuno dei numeri interi $\mathrm{Re}((5z)^n)$ né dei numeri interi $\mathrm{Im}((5z)^n)$ è divisibile per 5 (le cifre delle unità non sono mai 0 o 5), cioè le frazioni che rappresentano $\mathrm{Re}(z^n)$ e $\mathrm{Im}(z^n)$ sono ridotte ai minimi termini e, avendo al variare di n denominatore diverso, danno luogo a numeri complessi tutti diversi tra loro.

Altre considerazioni possibili:



- geometricamente costruire le potenze successive di $z = \frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$ è come aver costruito il triangolo pitagorico con vertice nell'origine e cateto minore sull'asse x e poi averlo rotato intorno all'origine in modo da portare il cateto minore sull'ipotenusa del primo triangolo e così via. È possibile fare una costruzione concreta di questo tipo con carta quadrettata e forbici. Che cosa succede alla sesta rotazione?

  ………………………………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………………………

- Per ogni potenza z^n, la parte reale e quella immaginaria sono il coseno e il seno dell'angolo formato con il semiasse delle x positive dal segmento che congiunge l'origine con il punto z^n. Può essere interessante constatare sulla tabella precedente come anche se il seno è molto prossimo a 1 (vedi z^{12}) il coseno è ben distante da zero.

NUMERI COMPLESSI

INTRODUZIONE E DEFINIZIONI

L'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni reali.
Invento un nuovo insieme numerico **C**, che contenga i numeri reali **R** e tale che in esso l'equazione abbia soluzione.
Ciò succede solo se in **C** esiste un "numero" il cui quadrato vale -1. Chiamo questo numero **unità immaginaria** e lo denoto con la lettera i. Per definizione

$$i^2 = -1.$$

L'insieme **C** dei **numeri complessi** è formato da tutte le possibili espressioni della forma $a + ib$ ove a e b sono numeri reali e i è l'unità immaginaria.
Se $z = a + ib$ chiamo **parte reale** di z il numero reale a e **parte immaginaria** di z il numero reale b e scrivo

$$a = \mathrm{Re}(z), \qquad b = \mathrm{Im}(z).$$

Definizioni. Considero due numeri complessi $z = a + ib$, $w = c + id$.

1) Definisco **uguali** z, w se hanno la stessa parte reale e la stessa parte immaginaria:
$$a = c \qquad \text{e} \qquad b = d.$$
2) Definisco **somma** di z e w il numero che ha per parte reale la somma delle parti reali e per parte immaginaria la somma delle parti immaginarie:
$$z + w = (a + c) + i(b + d).$$
3) Definisco **prodotto** di z e w il numero complesso:
$$z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc)$$
che ottengo facendo il prodotto dei due polinomi in i: $(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd$ e ricordando che $i^2 = -1$.

Per la somma e il prodotto di numeri complessi valgono le usuali proprietà delle operazioni. Inoltre:

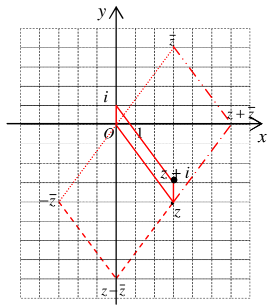
A) il numero complesso $z = 0 + 0i$ ha la proprietà: "per ogni numero w risulta $z + w = w$"; lo chiamo **zero** di **C** e lo denoto con 0;
B) il numero complesso $u = 1 + 0i$ ha la proprietà: "per ogni numero w risulta $u \cdot w = w$"; lo chiamo **unità** di **C** e lo denoto con 1;
C) il numero complesso $w = -a + i(-b)$ sommato a z dà 0: lo chiamo **opposto di** z e lo denoto con $-z$;
D) chiamo il numero complesso $\bar{z} = a + i(-b)$, in cui rispetto a z cambia solo il segno della parte immaginaria, **coniugato di** z: esso è tale che $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ è un numero reale, che vale 0 se e solo se $z = 0$;
E) se $z = a + ib$ non è lo zero di **C**, $z \cdot \dfrac{\bar{z}}{a^2+b^2} = 1$; quindi $\dfrac{\bar{z}}{a^2+b^2} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + i \cdot \dfrac{-b}{a^2+b^2}$ è il **reciproco di** z e lo denoto con $\dfrac{1}{z}$.

RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI

Ogni numero complesso $z = a + ib$ è in corrispondenza biunivoca una coppia ordinata di numeri reali (a, b), che a sua volta – fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel piano – è in corrispondenza biunivoca con un punto del piano. Quindi posso rappresentare ogni numero complesso $z = a + ib$ come punto del piano di ascissa $\mathrm{Re}(z) = a$ e ordinata $\mathrm{Im}(z) = b$.
Il piano pensato come rappresentazione di **C** viene detto **piano di Argand – Gauss**.

- Sull'asse x si trovano i numeri complessi della forma $z = a + 0i = a$, cioè i reali ➔ l'asse x viene detto **asse reale**.
- Sull'asse y si trovano i numeri complessi della forma $z = 0 + ib = ib$, cioè i cosiddetti **immaginari puri** ➔ l'asse y viene detto **asse immaginario**.

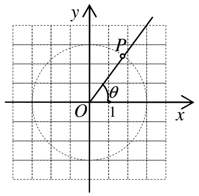
ESERCITAZIONE GUIDATA – Osserva la figura



1) Che numero rappresenta l'origine del sistema di riferimento?
Il numero complesso $z = 0$.
2) Dove si trova l'unità di **C**? e l'unità immaginaria i?
l'unità di **C** si trova sull'asse x, nel punto di coordinate (1,0)
invece i si trova sull'asse y, nel punto di coordinate (0,1)
3) In figura vedi il punto che rappresenta sul piano di Argand Gauss il numero complesso $z = 3 - 4i$: disegna i punti che rappresentano $-z$ e $\bar{z}$.
4) Somma i a $z = 3 - 4i$: $z + i = 3 - 3i$ e riporta il numero nel piano di Argand – Gauss.
Ripeti per le seguenti somme: $z + \bar{z} = (3 - 4i) + (3 + 4i) = 6$; $\quad z - \bar{z} = -8i$.
Questi esempi suggeriscono che:
sommare il numero complesso $w = \mathrm{Re}(w) + i\,\mathrm{Im}(w)$ al numero complesso $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$ equivale a fare una trasformazione geometrica sul punto $P = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ che rappresenta z. Quale? La traslazione di componenti $(\mathrm{Re}(w), \mathrm{Im}(w))$.
Infatti tale traslazione porta il punto $P = (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))$ in $Q = (\mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(w), \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(w))$
5) Qual è la distanza del punto che rappresenta $z=3 - 4i$ dall'origine del sistema di riferimento?
$\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Se $z = a + ib$ il numero reale non negativo $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ viene detto **modulo di** z e rappresenta la distanza dall'origine del sistema di riferimento del punto che rappresenta z.

FORMA TRIGONOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI



Ogni punto $P = (a, b)$ diverso dall'origine nel piano di Argand – Gauss può essere individuato assegnando la sua distanza r dall'origine O e la misura dell'angolo θ compreso tra il semiasse positivo delle ascisse e la semiretta OP.

Si ha: $a = r\cos\theta$ e $b = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Quindi

$$z = a + ib = r\cos\theta + i\,r\,\mathrm{sen}\,\theta = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Chiamo

$z = a + ib$: forma ***algebrica*** del numero complesso z

$z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$: forma ***trigonometrica*** del numero complesso z

θ : argomento del numero complesso z

Assegnare un numero complesso in forma trigonometrica significa mettere in evidenza il suo modulo e **<u>un</u>** suo argomento.

Spunti per discussioni ulteriori

SCOMPONIBILITÀ DI POLINOMI

Esistenza di k radici k-esime per ciascun numero complesso (*vedi quesiti pagina 6*).

L'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni reali significa che $x^2 + 1$ non si può scrivere come prodotto di due polinomi a coefficienti reali entrambi di grado minore di due. Anche $x^4 + x^2 + 1 = 0$ non ha soluzioni reali: sarà vero anche in questo caso che $x^4 + x^2 + 1$ non si può scrivere come prodotto di due polinomi a coefficienti reali entrambi di grado minore di quattro? No: si può scomporre nel prodotto di due polinomi di secondo grado: $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$.

Qual è il massimo intero positivo k tale che esista un polinomio a coefficienti reali di grado k che non si può scrivere come prodotto di due polinomi a coefficienti reali entrambi di grado minore di k? È $k = 2$. Questa è una conseguenza del (tutt'altro che semplice)

teorema fondamentale dell'algebra: ogni polinomio di grado k a coefficienti complessi ha esattamente k radici in **C**, eventualmente coincidenti almeno in parte.

Se il polinomio ha coefficienti reali si vede che le radici o sono reali o sono complesse ma a due a due coniugate: quindi i suoi fattori sono della forma

$(x - a)$ con a reale

oppure

$[x - (a + ib)][x - (a - ib)] = x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ con a e b reali.

ALLA SCOPERTA DI INFINITE TERNE PITAGORICHE (*vedi pagine 7 – 9*)

ESERCITAZIONE INDIVIDUALE

1) Trova la parte reale e la parte immaginaria dei due numeri complessi $(1 + i)(1 - i)$ e di $(1 + i)^2$

z	**Re(z)**	**Im(z)**
$(1 + i)(1 - i) = 1 + 1 = 2$	2	0
$(1 + i)^2 = 1 - 1 + 2i = 2i$	0	2

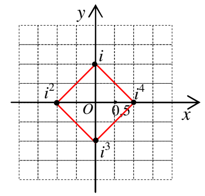
2) Se $(a + ib)(-1 + i) = 1$ quanto valgono a e b? $a = -½$, $b = -½$ poiché $a + ib$ è il reciproco di $-1 + i$: applico la formula osservando che $|-1 + i| = 2^{1/2}$. Oppure svolgo il prodotto: $-a - b + i(a - b) = 1$ se e solo se $\{a - b = 0$ e $(-a - b) = 1\}$. Risolvendo il sistema si ha la tesi.

3) $\dfrac{1}{-1+i}$ è un numero complesso? Sì, è il reciproco di $-1 + i$

Se hai risposto sì trovane parte reale e parte immaginaria $a = -1$, $b = 1$

Se hai risposto no, spiega brevemente perché.

4) Calcola e rappresenta nel piano di Argand – Gauss le potenze di i fino alla quarta:



$$i^1 = i,\quad i^2 = -1,\quad i^3 = -i,\quad i^4 = 1$$

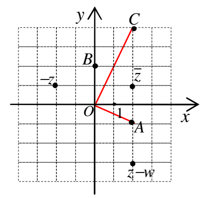
In generale al variare di k negli interi positivi quanto vale i^k?

Se $k = 4n$ vale 1, se $k = 1 + 4n$ vale i,

se $k = 2 + 4n$ vale -1, se $k = 3 + 4n$ vale $-i$.

I punti corrispondenti alle prime quattro potenze individuano una figura geometrica nota? Sì, un quadrato con vertici sugli assi cartesiani: (0,1), (–1,0), (0, –1), (1,0).

5) Rappresenta nel piano di Argand – Gauss i due numeri complessi $z = 2 - i$ e $w = 2i$ e chiama A e B i punti corrispondenti. Poi calcola e rappresenta:



$-z = -2 + i$
$\bar{z} = 2 + i$
$z - w = 2 - 3i$
$z \cdot w = 2 + 4i$

6) Calcola il modulo dei numeri z, w, $z \cdot w$ del quesito precedente:

$$|z| = \sqrt{5},\qquad |w| = 2,\qquad |z \cdot w| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Che cosa noti? Il modulo del prodotto è il prodotto dei moduli: $|z \cdot w| = |z|\,|w|$.

Chiama C il punto che rappresenta $z \cdot w$. Qual è la misura dell'angolo formato dai segmenti OA e OC? $\pi/2$.

7) Tenendo conto di quanto visto nel quesito 4 e nel quesito 6, il "prodotto per i" di un numero z quale trasformazione geometrica potrebbe rappresentare? Una rotazione di $\pi/2$.

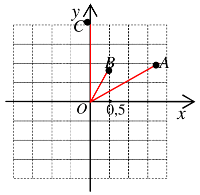
Verifica la tua congettura (*puoi aiutarti con una figura*):

– calcola $(a + ib) \cdot i = -b + ia$. Quanto vale il suo modulo? $\sqrt{b^2 + a^2} = |a + ib|$;

– quali sono i coefficienti angolari delle due rette passanti per l'origine O e per i due punti P e Q che rappresentano rispettivamente $a + ib$ e $(a + ib) \cdot i$? $m_P = b/a$, $m_Q = -a/b$;

– quindi, quanto misura l'angolo POQ? $\pi/2$.

8) Rappresenta nel piano di Argand – Gauss i numeri complessi $z = \sqrt{3} + i$, $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $z \cdot w$ e chiama A, B e C i punti corrispondenti. Poi



- calcola i loro moduli (noto che $z \cdot w = 2i$)

  $|z| = 2$, $|w| = 1$, $|z \cdot w| = 2$
- trova le misure α, β, γ degli angoli formati rispettivamente dai segmenti OA, OB, OC con il semiasse delle x positive e quella $\gamma - \alpha$ dell'angolo formato da OA e OC

  $\alpha = \pi/6$, $\beta = \pi/3$, $\gamma = \pi/2$, $\gamma - \alpha = \pi/3$

Che cosa noti circa il modulo del prodotto? È il prodotto dei moduli: $|z \cdot w| = |z||w|$

Che relazione c'è tra le misure α, β, γ? $\gamma - \alpha = \beta$

Che cosa rappresentano le misure α, β, γ nella forma trigonometrica dei tre numeri complessi? Gli argomenti (principali) dei tre numeri complessi.

Dopo aver svolto i quesiti da 4 a 8 che congettura puoi fare circa il significato del prodotto di un numero complesso $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$ per un altro $w = R(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\omega)$?

Significa operare sul punto che rappresenta z una rotazione di misura ω e una dilatazione di R. Infatti $z \cdot w = rR\,(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\omega) = rR\,(\cos(\theta + \omega) + i\,\mathrm{sen}(\theta + \omega))$. È ovvio che si può scambiare il ruolo di z e w.

Quesito 9

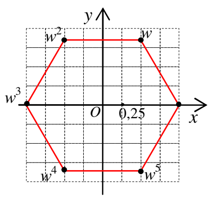
Considera il numero $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ del quesito 8 e completa la tabella calcolando le sue potenze successive ed il suo reciproco:

w	w^2	w^3	w^4	w^5	w^6	$\frac{1}{w}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	-1	$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$	1	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Ora rappresentali nel piano di Argand – Gauss: dove si trovano i punti corrispondenti?

Si trovano nei vertici di un esagono regolare con centro nell'origine del sistema di riferimento e un vertice in (1,0) e quindi su una circonferenza centrata nell'origine e di raggio 1.

Che cosa noti sul reciproco? Coincide con la quinta potenza: $1/w = w^5$.



Sia k un intero positivo.

Chiamo **radice k – esima** di un numero complesso z un numero complesso y tale che $y^k = z$.

Si dimostra che ogni numero complesso non nullo ha k radici k – esime a due a due diverse (*).

- È vero che $-i$ è una radice quarta di 1 e perché? Sì, perché $(-i)^4 = i^4 = 1$.

  È anche una radice quadrata di 1 e perché? No, perché $(-i)^2 = i^2 = -1$.

Considera il numero complesso $w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

- È vero che w è una radice sesta di 1 e perché? Sì, perché $w^6 = 1$ (vedi tabella).

  È anche una radice terza di 1 e perché? No, perché $w^3 = -1$ (vedi tabella).
- È vero che w^4 è una radice sesta di 1 e perché? Sì, perché $(w^4)^6 = (w^6)^4 = 1^4 = 1$.

  È anche una radice terza di 1 e perché? Sì, perché $(w^4)^3 = (w^6)^2 = 1^2 = 1$.
- Qual è il più piccolo k tale che $(w^5)^k$ sia una radice k – esima di 1 e perché?

  $k = 6$. Infatti ricordo che $w^5 = w^{-1}$; quindi $(w^5)^k = (w^{-1})^k = (w^k)^{-1} = 1$ se e solo se $w^k = 1$ e, come visto nella tabella, la prima potenza di w che dà 1 è la sesta.
- Come deve essere n perché w^n sia una radice terza di 1?

  n deve essere pari; infatti $(w^n)^3 = w^{3n}$ e, visto che $w^6 = 1$,

  se $n = 2k$ risulta $(w^{2k})^3 = (w^6)^k = 1^k = 1$, mentre se $n = 2k + 1$ risulta $(w^{2k+1})^3 = w^{6k}\,w^3 = w^3 = -1$.
- E perché w^n sia una radice quadrata di 1? n deve essere multiplo di 3; infatti $(w^n)^2 = 1$ se e solo se w^n è una delle 2 radici quadrate di 1, cioè 1 o –1; se n è multiplo di 6 si realizza la prima condizione, se lo è di 3 e non di 6 la seconda.
- Esistono n tali che w^n sia una radice decima di 1? n deve essere multiplo di 3; infatti $(w^n)^{10} = (w^{10})^n = (1 \cdot w^4)^n = (w^n)^4 = 1$ se e solo se w^n è una delle 4 radici quarte di 1; come visto nella tabella, nessuna potenza (intera) di w vale i o $-i$, mentre w^{3k} vale 1 o –1 a seconda che k sia pari o dispari.

(*) Se $z = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta)$, si deve trovare $v = R(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\omega)$ in modo che

(1) $r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta) = [R(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\omega)]^k$

Ora $[R(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\omega)]^k = R^k(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\omega)^k$ ed è facile vedere che

$$(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\omega)^2 = \cos(2\omega) + i\,\mathrm{sen}(2\omega)$$

e, in generale,

$$(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\omega)^k = \cos(k\omega) + i\,\mathrm{sen}(k\omega)$$

Quindi (1) è vera se e solo se

$$r = R^k \quad \text{e} \quad \theta + 2n\pi = k\omega \quad \text{con } n \text{ intero qualsiasi}$$

ma (per la periodicità di seno e coseno) solo k dei numeri corrispondenti sono a due a due distinti.

Alla scoperta di infinite terne pitagoriche

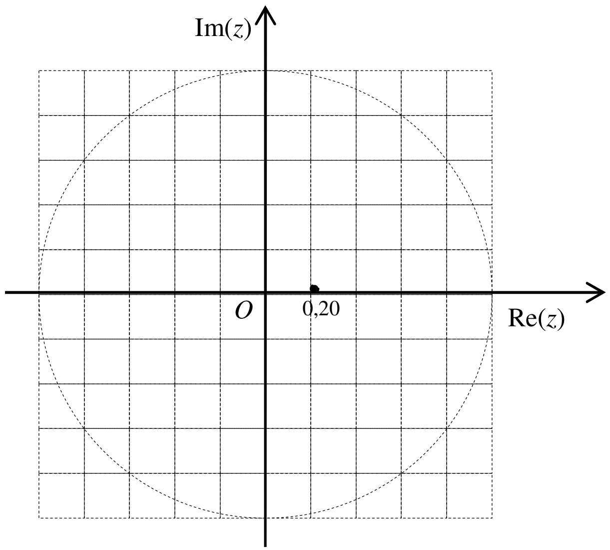
La terna di interi (3,4,5) è pitagorica poiché $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Trova il modulo del numero complesso $z = \frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$: $|z| = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{16}{25}} = 1$.

Trova parte reale e parte immaginaria e modulo di z^2: $\mathrm{Re}(z^2) = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -\frac{7}{25}$, $\mathrm{Im}(z^2) = 2\cdot\frac{12}{25} = \frac{24}{25}$, $|z^2| = \sqrt{\frac{49}{625} + \frac{576}{625}} = 1$.

La terna $(\mathrm{Re}((5z)^2), \mathrm{Im}((5z)^2), |(5z)^2|)$ è ancora pitagorica. Come puoi verificarlo senza fare conti?

$\mathrm{Re}((5z)^2) = 5^2\,\mathrm{Re}((z)^2)$ e $\mathrm{Im}((5z)^2) = 5^2\,\mathrm{Im}((z)^2)$ sono numeri interi e, per definizione di modulo, $[\mathrm{Re}((5z)^2)]^2 + [\mathrm{Im}((5z)^2)]^2 = |(5z)^2|^2$.



Come calcoleresti z^3 e più in generale z^n? $z^3 = z \cdot z^2$ e più in generale $z^n = z \cdot z^{n-1}$.

Puoi estendere alla terna $(\mathrm{Re}((5z)^n), \mathrm{Im}((5z)^n), |(5z)^n|)$ con n intero positivo qualsiasi le considerazioni che hai fatto quando n=2 e perché?

Sì. Si può dimostrare (per induzione) che anche nel caso generale $\mathrm{Re}(z^n)$ e $\mathrm{Im}(z^n)$ sono frazioni con denominatore 5^n e $|z^n| = 1$ e quindi lo stesso argomento usato per $n = 2$ mostra che la terna è pitagorica.

Rappresenta nel piano di Argand – Gauss z, z^2, z^3. Dove stanno questi punti? (VEDI fig. a pag. 9)

I tre punti (che chiamo – nell'ordine – *A*, *B*, *C*) stanno tutti su una circonferenza con centro nell'origine e raggio 1, visto che il loro modulo è 1 e gli angoli formati con l'asse *x* da *OB* e da *OC* misurano rispettivamente il doppio e il triplo di quello formati con l'asse *x* da *OA*.

Utilizza la tabella riportata nella pagina successiva per rappresentare sulla figura tutte le potenze di *z* fino alla settima. I punti che trovi sono tutti diversi? Sì.

Se consideri le successive potenze di *z* succede la stessa cosa? Forse, ma bisogna trovare un modo di provarlo.

potenza n	Fattore I		Fattore II		Denominatore $\vert (5z)^n \vert$	Cifra unità di $Re((5z)^n)$	Cifra unità di $Im((5z)^n)$	$Re(z^n)=\cos\theta$	$Im(z^n)=\text{sen }\theta$
	$Re((5z)^n)$	$Im((5z)^n)$	$Re((5z)^1)$	$Im((5z)^1)$					
1	3	4	3	4	5	3	4	0,6	0,8
2	-7	24	3	4	25	(-)7	4	-0,28	0,96
3	-117	44	3	4	125	(-)7	4	-0,936	0,352
4	-527	-336	3	4	625	(-)7	(-)6	-0,8432	-0,5376
5	-237	-3116	3	4	3125	(-)7	(-)6	-0,07584	-0,99712
6	11753	-10296	3	4	15625	3	(-)6	0,752192	-0,658944
7	76443	16124	3	4	78125	3	4	0,9784704	0,2063872
8	164833	354144	3	4	390625	3	4	0,42197248	0,90660864
9	-922077	1721764	3	4	1953125	(-)7	4	-0,472103424	0,881543168
10	-9653287	1476984	3	4	9765625	(-)7	4	-0,988496589	0,151243162
11	-34867797	-34182196	3	4	48828125	(-)7	(-)6	-0,714092483	-0,700051374
12	32125393	-242017776	3	4	244140625	3	(-)6	0,13158561	-0,99130481
13	1064447283	-597551756	3	4	1220703125	3	(-)6	0,871995214	-0,489514399
14	5583548873	2465133864	3	4	6103515625	3	4	0,914808647	0,403887532
15	6890111163	29729597084	3	4	30517578125	3	4	0,225775163	0,974179437

Dimostriamo nel seguito che, al variare di n, i punti individuati sulla circonferenza da z^n sono tutti diversi e quindi che è infinito l'insieme di terne pitagoriche

$$\{ \, (Re((5z)^n), Im((5z)^n), \vert (5z)^n \vert), \quad n \in \mathbf{N} \, \}.$$

Osserva:

nelle potenze riportate sopra, quali sono le cifre delle unità di $Re((5z)^n)$? 3 se il numero è >0, 7 se è <0; che legame c'è tra loro? $3 - 10 = -7$.

quali sono le cifra delle unità in $Im((5z)^n)$? 4 se il numero è >0, 6 se è <0 ; che legame c'è tra loro? $4 - 10 = -6$.

Verifica che le prime potenze di $5z$ possono essere rappresentate come $(10a + 3) + i\,(10b + 4)$ con a e b numeri interi eventualmente negativi:

Numero	$3 + 4i$	$-7 + 24i$	$-117 + 44i$	$-527 - 336i$	$-237 - 3116i$	$11753 - 10296i$	$76443 + 16124i$
a	0	-1	-12	-53	-24	1175	7644
b	0	2	4	-34	-312	-1030	1612

Adesso moltiplica:

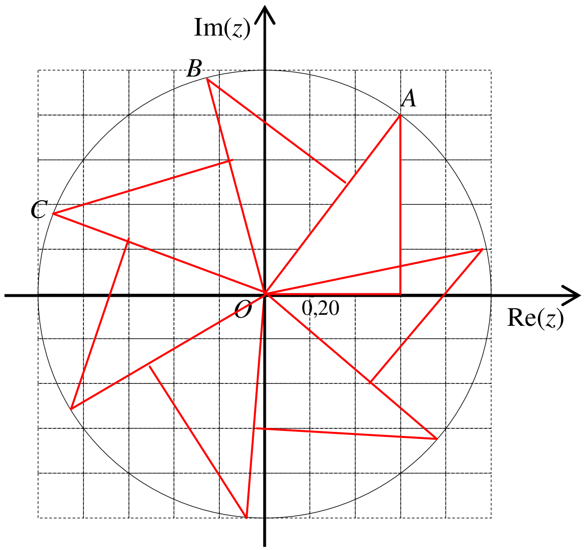
$[(10a + 3) + i\,(10b + 4)](3 + 4i) = 3\,(10a + 3) - 4\,(10b + 4) + i\,(3\,(10b + 4) + 4\,(10a + 3)) =$

$= (30a - 40b + 9 - 16) + i\,(40a + 30b + 12 + 12) = [10(3a - 4b - 1) + 3] + \mathrm{i}\,[(10(4a + 3b + 2) + 4]$

Quindi se $(5z)^n$ ha quella forma, la ha anche $(5z)^{n+1}$.

Ne consegue che nessuno dei numeri interi $\mathrm{Re}((5z)^n)$ né dei numeri interi $\mathrm{Im}((5z)^n)$ è divisibile per 5 (le cifre delle unità non sono mai 0 o 5), cioè le frazioni che rappresentano $\mathrm{Re}(z^n)$ e $\mathrm{Im}(z^n)$ sono ridotte ai minimi termini e, avendo al variare di n denominatore diverso, danno luogo a numeri complessi tutti diversi tra loro.

Altre considerazioni possibili:



- geometricamente costruire le potenze successive di $z = \frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$ è come aver costruito il triangolo pitagorico con vertice nell'origine e cateto minore sull'asse x e poi averlo rotato intorno all'origine in modo da portare il cateto minore sull'ipotenusa del primo triangolo e così via. È possibile fare una costruzione concreta di questo tipo con carta quadrettata e forbici. Che cosa succede alla sesta rotazione?

  Il vertice sulla circonferenza del triangolo ruotato cade nel primo quadrante ma non sull'asse x e quindi il triangolo si sovrappone parzialmente al primo.

- Per ogni potenza z^n, la parte reale e quella immaginaria sono il coseno e il seno dell'angolo formato con il semiasse delle x positive dal segmento che congiunge l'origine con il punto z^n. Può essere interessante constatare sulla tabella precedente come anche se il seno è molto prossimo a 1 (vedi z^{12}) il coseno è ben distante da zero.