La circonferenza e la sua equazione

§1. I termini

Ricordiamo che la circonferenza è una linea chiusa del piano costituita da tutti e soli i punti che hanno una data distanza da un punto fissato. In altri parole, la circonferenza è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto dato. Una circonferenza è dunque determinata fissando un punto e una distanza che chiameremo, rispettivamente, centro e raggio della circonferenza.

E.1.1 Quando si lavora con le circonferenze si usano anche altri termini: ti invitiamo a ripensare al loro significato, scrivendone una definizione e aggiungendo al disegno gli elementi che riterrai opportuno. diametro: … arco: … corda: … angolo al centro: … angolo alla circonferenza: …	

Ogni circonferenza divide il piano in due parti, ovvero nell'insieme costituito dai punti che distano dal centro della circonferenza non più del raggio e nell'insieme costituito dai punti che distano dal centro più del raggio. Il primo insieme, che è costituito dalla parte di piano contenuta nella circonferenza insieme ai punti della circonferenza stessa, prende il nome di cerchio.

E.1.2

Considera un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy e disegna la circonferenza di centro C (3; 4) e raggio r = 5.

Dal disegno osserverai che la circonferenza interseca l'asse delle ascisse in due punti distinti e quindi l'asse delle x è una retta secante la circonferenza. In effetti, la distanza di C da tale retta è minore di 5.

Disegna la retta di equazione y = - 3: essa non ha punti di intersezione con la circonferenza: infatti, la distanza di C da tale retta è maggiore di 5 ed è quindi esterna ad essa.

Infine disegna la retta parallela all'asse x passante per il punto A (3; -1).

Osserverai che la distanza di C da tale retta è uguale al ………………… e perciò potrai concludere che tale retta è tangente alla circonferenza.

E.1.3 Usando le proprietà della geometria elementare puoi determinare le coordinate dei punti di intersezione della circonferenza precedente con l'asse delle x: descrivi e giustifica il tuo procedimento (non basta perciò contare i quadretti)

E.1.4 Fissa due punti a piacere, chiamali A e B.

Domanda 1- Quante sono le circonferenze di centro A passanti per B? ....

Giustifica la risposta

Domanda 2- Quante sono le circonferenze passanti per A e B? ....

Giustifica la risposta

§2. L'equazione della circonferenza – Parte I

Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy e determiniamo l'equazione della circonferenza di centro C (α; β) e raggio r assegnati, essendo r un numero reale non negativo. Un generico punto P(x; y) del piano cartesiano appartiene alla circonferenza se e solo se la sua distanza da C è uguale a r e quindi se e solo se è soddisfatta l'equazione:

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(x-\beta)^2}=r \qquad (*)$$

Poiché i termini al primo e al secondo membro dell'equazione (*) non sono negativi, possiamo elevare al quadrato e scrivere la condizione equivalente

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \qquad (**)$$

che chiamiamo equazione della circonferenza di centro C(α; β) e di raggio r. Questa è un'equazione di secondo grado nelle incognite x e y: ciò risulta più evidente se svolgiamo i calcoli e riscriviamo l'equazione della circonferenza in questa forma:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0 \qquad (***)$$

o in questa forma

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+c=0 \qquad (****)$$

dove abbiamo indicato con la lettera c il complesso dei termini di grado zero, cioè $c = \alpha^2+\beta^2-r^2$.

E.2.1 Scrivi l'equazione della circonferenza dell'esercizio E.1.2 del §. 1.

E.2.2 Fissa a tuo piacere le coordinate di un punto. Scrivi l'equazione della circonferenza avente centro in tale punto e raggio un numero a tua scelta.

E.2.3 Determina il raggio della circonferenza che passa per il punto A (4; -2) e che ha centro in C (1, 2) e scrivine l'equazione.

E.2.3 Ciascuna delle seguenti equazioni rappresenta una circonferenza. Determinare, per ciascuna, le coordinate del centro C e il raggio r.	
$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$	C (… , …) r = …
$x^2 + y^2 - 3x - y = 0$	C (… , …) r = …
$x^2 + y^2 - 3x - 1 = 0$	C (… , …) r = …
$x^2 + y^2 + \sqrt{3}\,x - 1 = 0$	C (… , …) r = …

E.2.3 Consideriamo la prima delle circonferenze dell'esercizio precedente, cioè la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$. Ne hai già determinato il centro e il raggio. Riportali qui:

C (… , …) r = …

Nel seguito, dovrai stabilire la posizione di una data retta rispetto a tale circonferenza, cioè dovrai decidere se la retta è esterna o secante o tangente alla circonferenza.

La retta di equazione $y = 2$ è ……………….. alla circonferenza perché la distanza del centro C da tale retta è …………………

La retta di equazione $x = -1$ è ………………… alla circonferenza perché la distanza del centro C da tale retta è …………………

La retta di equazione $x = 1$ è ………………… alla circonferenza perché la distanza del centro C da tale retta è …………………

La retta di equazione $x - y + 4 = 0$ è ………………… alla circonferenza perché la distanza del centro C da tale retta è ……………….

§ 3. L'equazione della circonferenza – Parte II

Leggere attentamente il testo seguente e inserire negli spazi segnalati con _______________ una sola parola, o un solo simbolo o segno.

Riscriviamo l'equazione generale della circonferenza di centro $C(\alpha;\ \beta)$ e di raggio r ottenuta all'inizio del paragrafo precedente:

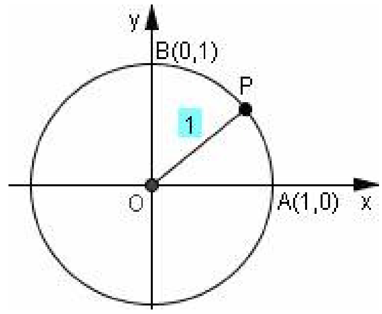
$$x^2 + y^2 - 2\,\alpha x - 2\,\beta y + c = 0 \qquad (****)$$

in cui

$$c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2.$$

Il primo membro dell' ___________ è un polinomio di ___________ grado in x e ____________ che non è completo _____________ manca il termine in ___________ y. Osserviamo inoltre che ___________ coefficienti di x^2 _____________ y^2 sono uguali _____________ 1.

Consideriamo ora la _____________ di centro O (0; _____________) e raggio 1, anche ____________ **circonferenza goniometrica**: essa ha _____________ $x^2 + y$___ = 1. Ma pure _____________ equazione $3x^2$ ___ $3y^2$ = ___ può essere usata per _____________ la circonferenza goniometrica: basta _____________ dividere tutti i suoi _____________ per 3 per ottenere _____________ equazione precedente.



L'equazione

$$\_\_\_x^2 + 5\,\_\_\_^{2} - 20x\,\_\_\_10y - 20\,\_\_\_\,0$$

è senz'altro _____________equazione di una circonferenza. _____________ dividendo tutti i coefficienti _____________ 5 si ottiene l'_____________

$$x^2 + y\_\_\_ - 4x + \_\_\_y - 20 = \_\_\_$$

che, come abbiamo visto _____________ precedente paragrafo, è quella _____________ circonferenza di centro C (____________ ; −1) e raggio _____________ a 3.

Consideriamo ora l'equazione

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 10 = 0\,. \qquad (6\ )$$

Il polinomio scritto al primo membro ha una forma analoga a quella del polinomio che compare nell'equazione (****). Possiamo concludere che l'equazione (6) rappresenta sicuramente una circonferenza? Per rispondere proviamo a determinarne centro e raggio, come è stato fatto negli esercizi precedenti.

Le coordinate del centro _____________ ricavano dai coefficienti dei _____________ in x e y, _____________ per 2 e cambiando _____________ segno: in questo caso _____________ la coppia (2; − ____________). La misura del raggio _____________ottiene usando la relazione

$$\_\_\_ = \alpha^2 + \_\_\_^{2} - r^2$$

_____________per comodità, dato che _____________ determinare r , riscriviamo in _____________forma:

$$r^2 = \_\_\_^{2} + \beta^2\,\_\_\_c\,.$$

Inserendo i valori _____________ α , β e c _____________:

$$r^2 = 2\_\_\_ + (-1)^2\,\_\_\_\,10 = -5$$

____________ è un valore impossibile ____________ il quadrato di un ____________ reale!

Dovremo perciò concludere ____________ (6) non è l'____________ di una circonferenza!

E.3.1 Ripeti il ragionamento appena illustrato per verificare se l'equazione

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 15 = 0$$

può essere l'equazione di una circonferenza.

E.3.2 Inserisci in _____________ le parole mancanti

Da quanto abbiamo visto, possiamo concludere che, affinché un'equazione della forma

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + c = 0$$

sia l'equazione di una circonferenza è _____________ che il numero $\alpha^2 + \beta^2 - c$ non sia _____________ .

Nel caso in cui tale numero risultasse uguale a zero si otterrebbe una circonferenza di raggio _____________ . In questo caso c'è solo il punto $C(\alpha; \beta)$ che soddisfa all'equazione e la circonferenza si ridurrebbe ad un solo _____________ .

Si usa anche dire che questo è il caso della circonferenza degenere.

E.3.3 Se con l'equazione

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

abbiamo descritto l'insieme dei punti $P(x; y)$ della circonferenza di centro $C(\alpha; \beta)$ e di raggio r, come descriveresti l'insieme dei punti $P(x; y)$ del cerchio individuato dalla circonferenza?