INTRODUZIONE

BOZZA

Il materiale che qui proponiamo è adatto per organizzare in una classe uno o più laboratori su temi legati alla topologia, in particolare sui grafi e sulle superfici.
Questi laboratori nascono dalle attività che il Centro *matematita* porta avanti da anni sul progetto di laboratori per affiancare l'insegnamento pre-universitario (vedi http://www.matematita.it/progetti/laboratori.php) e sono stati testati in diverse situazioni.
Il *kit* comprende alcuni poster, alcuni oggetti per la sperimentazione e due CD che a loro volta contengono le schede di laboratorio da stampare e distribuire ai ragazzi, e alcune immagini e animazioni che riguardano i temi trattati.
Sulla base di questo materiale sono possibili diverse scelte. Alla fine di questa introduzione si troveranno delle indicazioni, basate sulla nostra esperienza, per un possibile percorso completo oppure, in alternativa, per proposte più circoscritte nel tempo.

PERCHÉ LA TOPOLOGIA?

Ma perché la topologia, quando tutto sommato la topologia non è materia di insegnamento nelle scuole superiori?
Una prima ragione è proprio questa: ci pareva cioè che, al fine di incuriosire i ragazzi sui metodi e sui risultati della matematica, potesse essere utile anche qualche "incursione" in temi che possano essere per loro completamente nuovi rispetto al normale curriculum scolastico. E l'esperienza che abbiamo avuto in questi anni ci ha confermato questa ipotesi: il tema è in genere accolto con molto entusiasmo, sia dai ragazzi che dai colleghi.
Inoltre, proprio il fatto che si tratti di un argomento "extra" rispetto al normale curriculum presenta il vantaggio di togliere ai ragazzi la paura relativa alla necessità di prerequisiti e di far loro affrontare i problemi nello spirito del laboratorio: una cooperazione per una ricerca comune.
Un'ulteriore motivazione sta nel fatto che, anche se è vero che la topologia non rientra nei programmi scolastici preuniversitari, tuttavia non sono poche le argomentazioni o i fatti di natura topologica che vengono implicitamente toccati dai programmi scolastici e può in questi casi essere utile, al fine di una maggiore consapevolezza nel processo di apprendimento, una sottolineatura del fatto che un certo risultato non dipende da considerazioni di carattere metrico, ma da qualcosa di più profondo.
Un esempio, legato proprio ai temi proposti in questo laboratorio, può essere il teorema di Jordan (cioè il fatto che ogni curva semplice e chiusa divide il piano in due componenti). Questo non fa certo parte dei programmi scolastici, ma è in un certo senso "implicito" in tanti risultati che di questi programmi fanno parte; si pensi ad esempio alla discussione circa le possibili intersezioni fra una retta e una circonferenza: il motivo per cui i punti di intersezione non possono essere più di due è il fatto che la circonferenza è una conica, ma il fatto che l'intersezione (se è traversa) non possa essere costituita da

BOZZA

un solo punto dipende in realtà da qualcosa di più profondo - il teorema di Jordan, per l'appunto - e in effetti non vale solo per la circonferenza, ma per qualunque altra curva semplice e chiusa. Il teorema di Jordan è un esempio tipico di un risultato (profondo e significativo) su cui può essere difficile far ragionare i ragazzi: dopotutto l'enunciato è talmente ovvio (anche un bambino non ha dubbi sul fatto che disegnando una curva chiusa il piano si divide in un "dentro" e un "fuori"!) che sembra solo una pedanteria matematica soffermarcisi. Ecco allora che la varietà delle forme topologiche ci viene in soccorso, perché si può far osservare come su altre superfici (una ciambella, o un nastro di Moebius) questo fatto non sia più valido... e l'enunciato che sembrava così banale assume allora un significato diverso anche sul piano.

I CONTENUTI

I temi che abbiamo scelto di proporre per questo laboratorio sono essenzialmente due: i grafi e le superfici.

Per il primo argomento abbiamo scelto due problemi classici (circuiti euleriani e circuiti hamiltoniani) per mettere a confronto due situazioni apparentemente molto simili, ma in realtà assai diverse: il problema di cercare un circuito che percorre (una sola volta) tutti gli spigoli – equivalente al famoso problema dei ponti di Königsberg da cui prendiamo spunto – e quello di cercarne uno che tocchi (una sola volta) tutti i vertici.

Colpisce molto i ragazzi apprendere che una soluzione completa del problema (al di là dell'esaminare alcuni singoli casi come si propone nel laboratorio) esiste nel primo caso ma non nel secondo: una delle distorsioni molto diffuse in ciò che pensano i ragazzi della matematica è che si tratti di qualcosa di "vecchio", in cui tutto è già stato scoperto e si tratta solo di "imparare"; o, semmai, in cui possano esistere problemi irrisolti, ma che si tratti di problemi talmente difficili per cui il "profano" non può arrivare nemmeno a comprenderne l'enunciato; e abbiamo verificato come susciti una grossa impressione il sapere che esistono problemi (anche di facile formulazione) di cui non si conosce la soluzione.

Abbiamo poi aggiunto una rosa di problemi (che l'insegnante deciderà se proporre o meno) molto svariati, il cui scopo è essenzialmente quello di dare un quadro della varietà delle possibili situazioni in cui l'uso di un grafo può aiutare ad affrontare il problema, aprendo così anche uno squarcio sulle possibili applicazioni di questa branca della matematica.

Per quanto riguarda le superfici, abbiamo cominciato da un classico problema che sul piano non ha soluzione (perché "bloccato" dal teorema di Jordan) e ne abbiamo proposto delle "varianti", che corrispondono a risolvere lo stesso problema sulla superficie di un toro o di un nastro di Moebius. Da questa situazione si prende spunto per far osservare alcune proprietà di queste superfici e per proporre degli "esercizi di immaginazione" circa quali superfici si possono ottenere con opportune operazioni di "taglia e cu-

BOZZA

ci". Questo tipo di proposte possono costituire a nostro avviso un'occasione per riportare l'attenzione su quel "gusto geometrico", che comprende facoltà come la capacità di visualizzazione, di immaginazione e di interpretazione, che possono essere preziose anche al di fuori della matematica, e che rischiano di essere un po' offuscate da un insegnamento della geometria che privilegi in modo quasi esclusivo la geometria analitica.
Infine, per chi volesse scegliere un percorso completo, alcune schede forniscono un legame fra queste due situazioni introducendo il numero di Eulero (V-S+F), innanzitutto sui grafi planari, e poi sui poliedri, mostrando come questo numero non sia sempre uguale a 2, ma dipenda dalla topologia della superficie costituita dal poliedro e arrivando così a dare un'idea – sia pure vaga – di un risultato assai significativo come quello della classificazione delle superfici.

I METODI

Dal punto di vista della metodologia, tutto il materiale è organizzato in schede di laboratorio (di cui si può trovare nell'allegato CD l'impaginato da stampare e distribuire ai ragazzi); per ciascuna di queste si trova in questo quaderno una presentazione per gli insegnanti, comprendente soluzioni e commenti. Ciascuna delle schede di laboratorio è sostanzialmente autosufficiente, in modo che per l'insegnante sia possibile organizzare il percorso che preferisce.
Le schede di laboratorio sono pensate per essere affrontate in piccoli gruppi di ragazzi, in modo da favorire un atteggiamento attivo di "ricerca" rispetto ai problemi proposti, un interscambio delle idee, degli errori, delle scoperte. Ognuna di esse prevede degli spazi bianchi in cui scrivere le risposte ai diversi quesiti (in modo da confrontare poi in una discussione con l'intera classe le risposte dei diversi gruppi); ben sappiamo che questo momento della rielaborazione e della scrittura di ciò che si è "scoperto" è il momento più pesante, e che i ragazzi tendono a rifiutarlo! È peraltro indispensabile non saltare questo passaggio e utilizzarlo anzi come il momento del confronto, sia all'interno del gruppo (prima di scrivere una risposta vanno confrontate le diverse soluzioni, in modo da arrivare a una risposta condivisa dai vari membri del gruppo), sia fra i diversi gruppi nella classe.
Spesso i problemi richiedono di costruire qualcosa, con carta e scotch, o fili e puntine, o con il materiale *ad hoc* fornito in questo *kit*; in questi casi occorre sempre curare un rapporto equilibrato tra il momento concreto della costruzione e la successiva formalizzazione astratta di quanto si osserva. Da un lato quindi vanno stimolati i ragazzi a non "snobbare" l'aiuto effettivo che può venire all'intuizione dalla manipolazione di oggetti (anche se, nella nostra esperienza, non c'è stato bisogno di questo stimolo, perché i ragazzi hanno accolto con molto entusiasmo questa possibilità); dall'altro vanno frenati e indotti a non riporre una fiducia cieca in questi supporti: il che significa contribuire ad affinare sia le proprie ca-

BOZZA

pacità di immaginazione (cercando quindi sempre di "prevedere" il risultato di una costruzione prima di realizzarla effettivamente) sia le proprie capacità di astrazione che permettono dall'osservazione di alcuni fenomeni di arrivare a ipotizzare (e magari poi a dimostrare) un risultato valido in generale.

L'attività di laboratorio non prevede un'aula appositamente attrezzata; occorre però fare in modo che i ragazzi possano lavorare a piccoli gruppi intorno a un tavolo (e per questo è generalmente sufficiente cambiare la disposizione dei banchi) e predisporre un tavolo extra per il materiale da tenere a disposizione di tutti i gruppi.

In tutta questa attività di laboratorio un aspetto cruciale è quello dei tempi: è cioè fondamentale lasciare ai ragazzi il tempo di cui hanno bisogno. Uno dei vantaggi di organizzare l'attività in lavoro di gruppo è proprio il fatto che ogni gruppo può definire, nel corso dell'attività, i propri tempi: questi non saranno uguali per tutti perché alcuni ragazzi hanno più bisogno del momento concreto (osservativo-analitico) e poi riescono a sintetizzare più in fretta, mentre altri gruppi riescono a visualizzare prima e poi hanno bisogno di molto più tempo per riuscire a scrivere e registrare le proprie idee ovvero per il momento sintetico-razionale della formalizzazione. Non può esserci una regola a priori sui tempi e la funzione dell'insegnante è proprio quella di equilibrarli, curando che tutti i gruppi passino per entrambi questi aspetti.

È vero che in questo modo si ha la sensazione di "perdere tempo"; d'altra parte quello che si cerca di ottenere è proprio il fatto di cambiare l'approccio con l'apprendimento: i ragazzi imparano perché arrivano da soli a prendere coscienza di come funziona qualcosa. E, quando questo accade, il vantaggio (enorme) che se ne ottiene è che i concetti appresi sedimentano molto più in profondità nella nostra mente e l'apprendimento resta quindi molto più stabile. Ciò non toglie che bisogna fare poi tanto esercizio per ricordare e per padroneggiare la tecnica, ma questo può avvenire in un secondo tempo.

Si può fare un parallelo con i meccanismi di apprendimento di una lingua straniera: dopotutto la matematica è in un certo senso una "lingua straniera" di cui dobbiamo imparare vocabolario e regole quando vogliamo porci a un livello di astrazione superiore a quello che ci è richiesto dalla vita quotidiana. E, nell'insegnamento delle lingue, da tempo si è arrivati alla conclusione che, rispetto all'insegnamento "da manuale" (in cui si punta quasi esclusivamente sull'apprendimento delle regole di grammatica e sintassi, con poca pratica), funziona molto di più un metodo a *full immersion*, in cui ci si trova in pratica a dover affrontare una situazione concreta nell'altra lingua, e via via si sviluppa un linguaggio per farsi capire, e poi lo si raffina cercando di essere sempre più precisi, di imparare nuovi vocaboli, di costruire frasi sempre più complicate, registrando per iscritto quanto man mano si sta osservando. E questo è proprio il metodo che proponiamo con questi laboratori!

BOZZA

IL MATERIALE A DISPOSIZIONE

Il *kit* che presentiamo con questo quaderno comprende:

- due CD-rom;
- il materiale per costruire i modelli di dodecaedri richiesti dal problema proposto nella scheda B e altri poliedri utili per discutere i problemi delle schede F;
- un modello plastificato delle cartine (di quattro tipi, corrispondenti al caso del piano, del cilindro, del nastro di Moebius e del toro) per il problema proposto nelle schede D; le cartine si possono poi stampare dal CD, per averne a disposizione diverse da distribuire fra i ragazzi;
- tori di polistirolo, fili e puntine per affrontare sul toro il problema della scheda D2 e i problemi posti nella scheda F2;
- rettangoli trasparenti per disegnare su un nastro di Moebius la soluzione al problema della scheda D2 e rettangoli colorati per il problema posto nella scheda E3;
- un triangolo in stoffa con zip (vedi scheda E1);
- tubi e raccordi per costruire superfici (vedi scheda E2);
- rettangoli di neoprene con bordo calamitato per costruire (e confrontare) cilindri e nastri di Moebius (vedi scheda E3);
- quattro poster sul tema della classificazione delle superfici (vedi schede E e F);
- un modello plastificato delle schede da distribuire ai ragazzi; queste possono essere poi stampate dal CD.

Il primo CD-rom a sua volta comprende:

- le schede di laboratorio (in bianco e nero) da stampare e distribuire ai ragazzi: si suggerisce di stamparne una copia per ogni ragazzo;
- le cartine da stampare e distribuire ai ragazzi (queste vanno necessariamente stampate a colori): è sufficiente stamparne una per ogni gruppo di ragazzi.

Il secondo CD-rom fa parte di una collana di prossima uscita, che si propone di mettere a disposizione delle scuole (con uno strumento di più agile consultazione) parte del patrimonio di immagini e animazioni già disponibile in rete al sito *Immagini per la matematica* (http://www.matematita.it/materiale). In particolare il CD **Visioni (non) superficiali**, di cui qui presentiamo una bozza, comprende, fra le altre cose:

- alcune animazioni sulle superfici che si possono mostrare a conclusione del percorso fatto;
- una galleria di immagini che riguardano i temi trattati che possono essere usate in varie maniere, sia a complemento iconografico del percorso, sia anche come stimolo per i ragazzi a cercare essi stessi, nella realtà che li circonda, delle immagini da cui si possano "leggere" i fatti matematici che sono stati discussi.

Nella presentazione per l'insegnante delle diverse schede di laboratorio in questo quaderno si specificherà poi, di volta in volta, se c'è altro materiale di uso comune (carta, forbici, scotch...) che è op-

BOZZA

portuno avere a portata di mano e mettere a disposizione dei ragazzi per il singolo problema discusso.

I POSSIBILI PERCORSI: ORGANIZZAZIONE E TEMPI

Le schede di laboratorio che proponiamo per il lavoro dei ragazzi e che si trovano qui di seguito commentate comprendono i seguenti problemi:

A. Grafi euleriani:
   - A1 i sette ponti di Königsberg
   - A2 sedici ponti a Parigi

B. Grafi hamiltoniani: una passeggiata lungo gli spigoli di un dodecaedro

C. Altri problemi sui grafi:
   - C1 il torneo di calcio
   - C2 ti conosco o non ti conosco?
   - C3 il cavallo degli scacchi

D. Il problema delle tre case:
   - D-I il problema delle tre case 1 (sul piano)
   - D-II il problema delle tre case 2 (su altre superfici)

E. Superfici:
   - E1 Dai poligoni alle... superfici topologiche
   - E2 Riconoscere superfici topologiche
   - E3 Cilindri e nastri di Moebius

F. Caratteristica di Eulero:
   - F-I Un numero per distinguere le superfici 1
   - F-II Un numero per distinguere le superfici 2

Le schede corrispondono a un percorso effettivamente sperimentato nella sua quasi totalità in alcune classi III e IV di liceo scientifico a Milano, nell'ambito del Progetto Lauree Scientifiche, per un totale di otto ore. Parti di questo percorso sono state sperimentate, in questa forma o in forme lievemente diverse, sia nei laboratori offerti dal centro *matematita* presso il Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano, sia nei laboratori organizzati dal Centro stesso per il Museo Tridentino di Scienze Naturali, in occasione dell'allestimento della mostra *matetrentino*.

Ogni insegnante può naturalmente ritagliare il proprio percorso, a seconda dei propri interessi, della classe a cui lo presenta, del tempo che intende utilizzare a questo scopo. Diamo qui di seguito qualche suggerimento:

- A e B pongono due problemi classici della teoria dei grafi (grafi euleriani e grafi hamiltoniani): uno o due incontri, di due ore ciascuno, sono nella nostra esperienza sufficienti per una discussione senza fretta dei due problemi.
- I problemi del gruppo C sono indipendenti fra loro (e dai precedenti) e possono essere tenuti in qualche modo come jolly, per riempire uno spazio scoperto se in coda a un incontro resta del tempo, ma non abbastanza per affrontare una delle schede successive o se si vuole, a distanza di tempo, ritornare su un problema relativo ai grafi per verificare cosa ai ragazzi è rimasto dei temi e dei me-

BOZZA

todi toccati negli esempi precedenti.

- Il problema trattato in D può essere visto come un "ponte" tra i problemi di grafi dei gruppi precedenti e i problemi successivi riguardanti le superfici; alternativamente, se per ragioni di tempo si preferisce pensare a un percorso ridotto, e centrato essenzialmente sulle superfici, questo problema potrebbe costituire un buon inizio.
- I problemi trattati in E possono occupare due incontri di un paio d'ore ciascuno, magari completati all'inizio del primo incontro con il problema posto in D e alla fine del secondo incontro con una proiezione delle animazioni contenute nel secondo CD-rom.
- Infine, il problema posto in F, anche se di per sé è autosufficiente e non richiede i precedenti come prerequisiti, si propone di tirare un po' le fila del percorso svolto e di definire un numero (la caratteristica di Eulero) che collega i problemi precedenti e permette di vederli da un punto di vista più ampio. Un incontro di due ore dovrebbe essere sufficiente per discutere il problema.

Il materiale è stato pensato per un triennio di scuola secondaria superiore. Tuttavia, proprio la mancanza di specifici prerequisiti a cui già si faceva riferimento fa sì che il materiale sia utilizzabile anche con classi del biennio (e parti di esso sono state effettivamente sperimentate sia al biennio, sia anche - con diverse formulazioni - in classi di scuola media): la differenza in questi casi consiste essenzialmente nel livello di rigore e di consequenzialità che l'insegnante potrà richiedere, nei singoli problemi, come giustificazione delle argomentazioni fatte: è ragionevole pensare che queste si limiteranno a un livello osservativo nella scuola media, per arrivare a livelli via via più consapevoli e razionali con i ragazzi più grandi.
Per finire vi invitiamo a utilizzare il sito http://www.matematita.it per segnalare osservazioni, commenti e quant'altro. Il forum aperto alla pagina http://www.matematita.it/forum potrà essere un utile strumento di confronto tra gli utilizzatori di questo *kit*.