UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "F. ENRIQUES"

Progetto Lauree Scientifiche

Unità operativa di Milano Città Studi

Laboratorio di Giochi Matematici

(responsabile Prof. Stefania De Stefano)

Incontri presso il Liceo - Ginnasio "Parini" di Milano
Anno scolastico 2006/07

4. Soluzioni proposte dei giochi
Versione estesa (*)

(*) Agli studenti sono state consegnate solo le soluzioni dei giochi effettivamente svolti durante gli incontri

Soluzioni dei Giochi di "scacchiera" (Incontro N° 1)

Il gioco dei grattacieli

In una città ultramoderna ci sono solo grattacieli da 10, 20, 30 o 40 piani. Rappresentate la pianta di un isolato di tale città con una griglia quadrata.
Regole del gioco.
Se guardando l'isolato dal lato corrispondente al lato alto della griglia vedete in sequenza da sinistra a destra:
4 grattacieli, 1 grattacielo, 3 grattacieli, 2 grattacieli
trascrivete la cosa sulla griglia come qui a lato.
Analogamente quando guardate dagli altri lati.

	4	1	3	2	

	○	●	■	□	
	□	■	●	○	
	●	□	○	■	
	■	○	□	●	

1) Mettete sui quadrati grigi le etichette corrispondenti al numero di grattacieli che si vedono nella griglia a sinistra, sapendo che:
- il cerchietto bianco rappresenta grattacieli da 10 piani
- il quadratino bianco rappresenta grattacieli da 20 piani
- il cerchietto nero rappresenta grattacieli da 30 piani
- il quadratino nero rappresenta grattacieli da 40 piani

Soluzione:

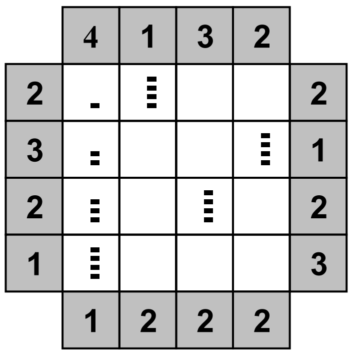
	4	2	1	2	
3	○	●	■	□	2
2	□	■	●	○	3
2	●	□	○	■	1
1	■	○	□	●	2
	1	3	3	2	

	4	1	3	2	
2					2
3					1
2					2
1					3
	1	2	2	2	

2) Sapendo che su ogni riga e su ogni colonna c'è uno ed un solo grattacielo di ogni altezza, siete in grado di ricostruire dove stanno i grattacieli rispettivamente da 10, 20, 30, 40 piani a partire dall'etichettatura data alla griglia indicata qui a destra?

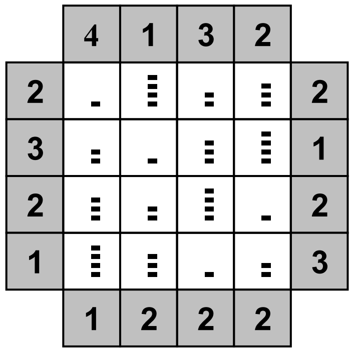
Soluzione. Per spiegare come si perviene alla soluzione conviene denotare nella griglia bianca:
- le righe (dall'alto in basso) con le lettere a, b, c, d
- le colonne da sinistra a destra con i numeri 1, 2, 3, 4

Così la casella sulla prima riga e seconda colonna sarà individuata dalla coppia ordinata (a,2). Ora osserviamo che, tutte le volte che sulla griglia grigia compare un 1, ci sarà un grattacielo da 40 piani proprio sul bordo della griglia bianca: ciò succede in (a,2), (b,4), (d,1). Visto che su ogni riga/colonna deve esserci un solo grattacielo da 40 piani, il restante deve stare in (c,3). Il fatto che dall'alto della prima colonna si vedano 4 grattacieli dice che devono essere disposto dal più basso al più alto come in figura, ove ogni decina di piani è rappresentata da un segmentino (per facilitare la verifica visiva della soluzione).



Il fatto che da destra sulla prima riga si vedano solo 2 grattacieli dice che in (a,3) deve esserci un grattacielo più basso che in (a,4): 20 e 30 piani rispettivamente.

Il fatto che dal basso sulla seconda colonna si vedano solo 2 grattacieli ci dice ora che in (d,2) deve esserci un grattacielo da 30 piani, e - sfruttando il fatto che sulla colonna 2 ci devono essere tutti i tipi di grattacielo e sulla riga b non ci può essere più di un grattacielo da 20 piani - si vede che in (b,2) c'è un grattacielo da 10 e in (c,2) uno da 20 piani. Questo implica che in (b,3) ci sia un grattacielo da 30 piani. I restanti 3 grattacieli sono in posizione forzata: gli unici che mancano sulla terza riga e terza colonna sono da 10 piani e quello che manca in (d,4) è da 20.

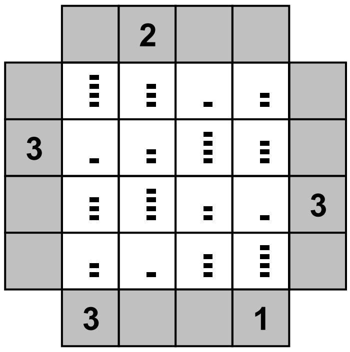


NOTA: giustificando ad ogni passo l'inevitabilità di certe scelte, abbiamo dimostrato che il problema posto ha una sola soluzione e visto che siamo arrivati in fondo al gioco abbiamo dimostrato che questa soluzione esiste!
PENSA: nella griglia grigia c'erano informazioni superflue?

		2			
3					
					3
	3			1	

3) E a partire dall'etichettatura data alla griglia indicata qui a sinistra?

Soluzione: conviene individuare subito la posizione del maggior numero possibile di grattacieli da 40 piani, ragionando sulle posizioni proibite dalle etichette 3.

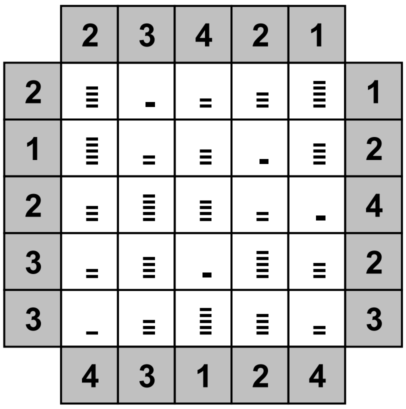


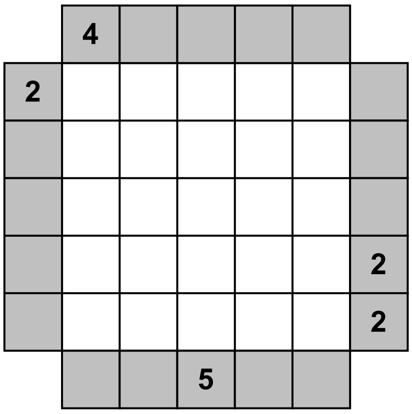
NOTA: Può facilitare la ricerca della soluzione annotare su ogni casella, quelle che in un certo momento sembrano situazioni ugualmente possibili, depennando via via quelle che non rispondono a qualche requisito.

4) Ora, supponendo che su ogni riga e ogni colonna ci sia anche un grattacielo da 50 piani, siete in grado di dire dove stanno i grattacieli da 10, 20, 30, 40, 50 piani a partire dall'etichettatura data alla griglia indicata qui a destra?

	2	3	4	2	1	
2						1
1						2
2						4
3						2
3						3
	4	3	1	2	4	

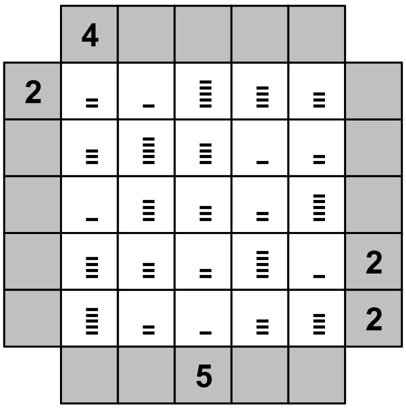
Soluzione:





5) E a partire dall'etichettatura data alla griglia indicata qui a sinistra?

Soluzione:

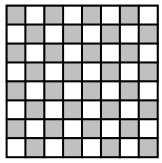


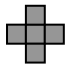
Altri giochi di scacchiera

6) (**Croci greche**) Sistemiamo in una scacchiera quadrata 8×8 delle tessere a forma di croce simmetrica come quella in figura, formate dall'accostamento di 5 quadrati di dimensione identica alle celle della scacchiera, in modo che:

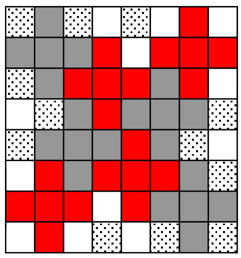
- ciascuna di esse vada a coprire esattamente (sovrapponendovisi) 5 delle 64 caselle della scacchiera;
- le tessere non si sovrappongano, ma possano toccarsi e toccare il bordo della scacchiera.

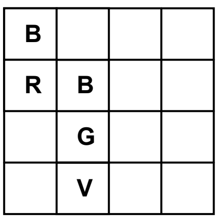
Quante tessere può ospitare al massimo la scacchiera?





Soluzione. È ovvio che, per ogni lato della scacchiera, sono al massimo due le caselle adiacenti quel lato che possono venire coperte da qualche tessera. Quindi non più di 2·4 + 6·6 = 44 caselle della scacchiera possono essere coperte, il che (coprendo ogni tessera 5 caselle e non potendo le tessere sovrapporsi) significa che la scacchiera non può ospitare più di 8 (=quoziente di 44:5) tessere. In effetti 8 tessere possono essere collocate, ad esempio come mostra la figura. Altre possibili soluzioni sono fornite alla fine delle soluzioni dell'incontro N° 1).

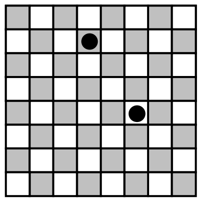




7) (**Colorazioni**) Avete 16 carte: 4 blu (**B**), 4 rosse (**R**), 4 gialle (**G**) e 4 verdi (**V**). Volete collocarle nella griglia quadrata riportata nella figura, una per cella, in modo che ogni riga e ogni colonna della griglia contenga una carta per ogni colore. Avete già iniziato l'opera come indicato; in quanti diversi modi potete completarla?
A) 1 B) 2 C) 4 D) 16 E) 128

Soluzione: (C). Le scelte che completano le prime due colonne sono obbligate. La terza consente la doppia scelta *VG* o *GV* per i primi due posti dall'alto e, indipendentemente, *BR* o *RB* per gli altri due. Riempita la terza colonna, la quarta è determinata.

E se ci avanza tempo …



8) In quanti modi si può scegliere, su una scacchiera tradizionale 8x8, una coppia di caselle, una bianca ed una nera, in modo che tali caselle non giacciano né sulla stessa riga né sulla stessa colonna?
A) 56 B) 5040 C) 720 D) 672 E) 768

Soluzione: (E). Le caselle nere sono 32: ciascuna di esse può venire accoppiata con una delle 32 – 8 = 24 caselle bianche che non stanno né sulla sua riga né sulla sua colonna (in questo modo tutti gli accoppiamenti possibili vengono considerati una e una sola volta).

9) Considerate una scacchiera 7×7 e chiamate *croce greca* ogni configurazione di 5 sue caselle disposte a croce in modo che ogni casella abbia in comune almeno un lato con un'altra casella della croce (quindi ogni croce ha 4 bracci uguali ciascuno costituito da una casella). Si possono disporre 49 numeri interi, non necessariamente tutti uguali fra loro, sulle 49 caselle, uno per casella, in modo che la somma totale di questi interi sia negativa, ma la somma dei numeri corrispondenti alle caselle ricoperte da una qualsiasi croce greca sia positiva?

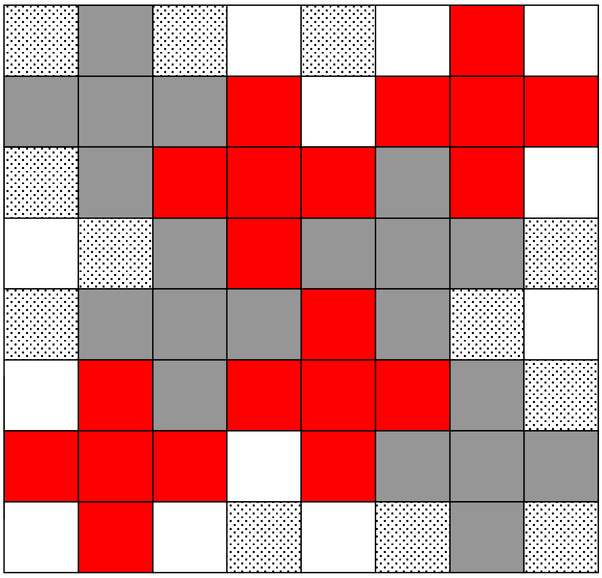
Soluzione: sì. Si osserva infatti che nessuna delle quattro caselle d'angolo può essere coperta da una croce greca: basta quindi mettere in ciascuna casella, tranne in una delle quattro d'angolo, il numero 1 (quindi la somma in ogni croce greca risulta 5) e nella restante casella mettere – 48 – 1 = – 49. La somma totale degli interi vale allora –1.

10) Considerate una scacchiera 7×7 a cui sono state tolte le 4 caselle d'angolo; chiamate croce greca la configurazione di 5 sue caselle descritta sopra. Dimostrate che è possibile disporre 45 numeri interi (non necessariamente tutti diversi fra loro) sulle 45 caselle rimaste, uno per casella, in modo che la somma totale di questi interi sia negativa, ma la somma dei numeri corrispondenti alle caselle ricoperte da una qualsiasi croce greca sia positiva. (Suggerimento: individuate un insieme convenientemente ridotto S di caselle con la proprietà che ogni croce greca copra almeno una casella appartenente ad S).

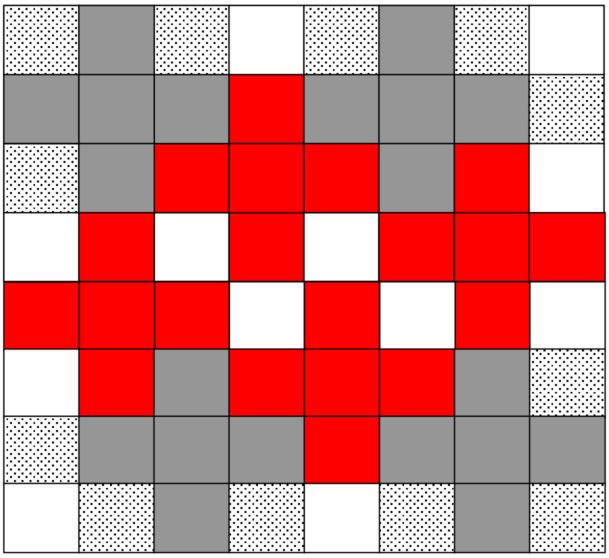
Soluzione. L'idea è di inserire in alcune caselle della scacchiera, il cui numero indichiamo provvisoriamente con x, il numero 5 e nelle restanti 45 – x il numero –1, in modo che ogni croce greca che si può individuare sulla scacchiera copra almeno una casella cui sia stato assegnato il numero 5. Poiché si vuole che la somma totale dei numeri sulle 45 caselle sia negativa, 5x – (45 – x) deve essere negativo e quindi x non può superare 7: vogliamo che ogni croce greca contenga almeno una di queste 7 caselle cui è stato assegnato il numero 5. Stante il ridotto numero di caselle, occorre "economizzare" la loro scelta: ciò spinge ad evitare che queste caselle siano adiacenti ai bordi della scacchiera, in quanto ogni casella adiacente a un bordo può appartenere ad una sola croce greca. A questo punto le possibilità si riducono drasticamente e si può semplicemente procedere per tentativi. Qui si presenta una configurazione particolarmente simmetrica, ottenuta partendo dal centro della scacchiera e disponendo i restanti sei 5 ai vertici di un esagono.

		5		5		
	5		5		5	
		5		5		

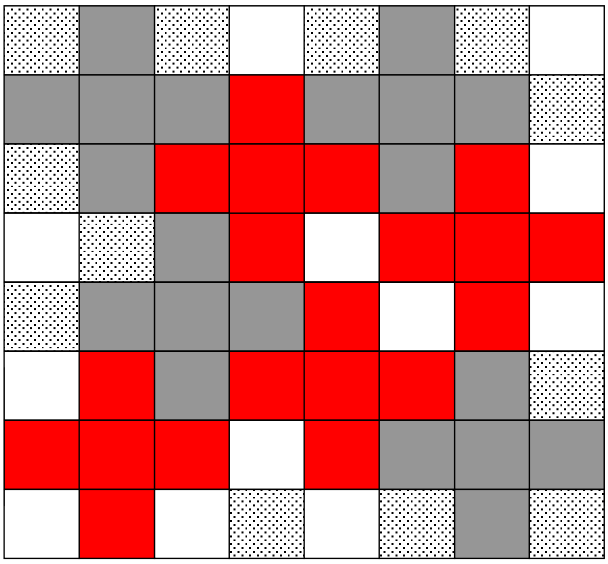
Non c'è una sola configurazione che permette la presenza di otto croci greche sulla scacchiera:



La soluzione a simmetria centrale già evidenziata



Un'altra soluzione a simmetria centrale



Una soluzione non simmetrica

Soluzioni dei Giochi con le scelte (Incontro N° 2)

1. (**Elenchi**) Desidero un gelato ai seguenti 4 gusti: panna, tartufo, caffè e malaga: in quanti modi diversi posso elencare i quattro gusti al gelataio?

Soluzione: 24. Infatti posso scegliere quale gusto elencare per primo in 4 modi diversi, quale elencare per secondo in 3 modi diversi tra i 3 gusti restanti, quale elencare per terzo in due modi diversi tra i 2 restanti, mentre l'ultimo è forzato.
Per capire perché devo moltiplicare tra loro il numero di scelte possibili ad ogni passo, posso dire: "Posso elencare 2 gusti C, M in soli due modi CM e MC. Indipendentemente da questa prima scelta, in entrambi gli elenchi XY posso inserire un altro gusto solo nelle posizioni indicate dai trattini: _XY oppure X_Y oppure XY_ (totale: $2\times3=6$ modi possibili); infine in ognuno dei 6 elenchi XYZ posso inserire un altro gusto solo nelle posizioni indicate dai trattini: _XYZ oppure X_YZ oppure XY_Z oppure XYZ_ (totale: $6\times4=24$ modi possibili)."
Questa strategia permette anche di generalizzare a 5 o più gusti.

2. (**Caramelle**) Una scatola di latta contiene 100 caramelle. Di queste, 28 sono alla fragola, 20 alla menta, 12 al limone, 20 all'arancia, 10 al miele e 10 alla liquirizia. Se estraete le caramelle al buio, qual è il minimo numero di caramelle che vi basta estrarre per essere sicuri di averne almeno 15 allo stesso gusto?

Soluzione: 75. Se sono sfortunato (cioè nel caso peggiore che mi può capitare) pesco le 12 caramelle al limone, le 10 al miele e le 10 alla liquirizia e 14 caramelle per ciascuno degli altri 3 gusti (74 in totale). All'estrazione successiva ho finalmente 15 caramelle allo stesso gusto.

3. (**Giochi di ruolo**) Andrea e Luca per partecipare ad un gioco di ruolo devono inventarsi le date dei loro compleanni: in quanti modi possono farlo? e se si aggiunge anche Mario? e se i giocatori sono 4,5, …?

Soluzione: Supponiamo per semplicità che non ci siano anni bisestili: ogni ragazzo può scegliere come compleanno uno dei 365 giorni dell'anno; notiamo che decidere che il compleanno di Andrea è il 25 aprile e quello di Luca il 4 luglio è una cosa completamente diversa dal decidere che il compleanno di Andrea è il 4 luglio e quello di Luca il 25 aprile. Quindi le possibili scelte distinte sono $365\times365=365^2$. In generale, immaginiamo di mettere in fila i nostri personaggi con un cartello recante la data del loro compleanno: le sequenze possibili delle loro date di nascita sono in totale 365^n, ove n è il numero dei giocatori.

3 bis. (**Totocalcio**) Vorrei essere certo di fare "14" al totocalcio: qual è il minimo numero di colonne che mi basterebbe giocare? Se gioco tutte queste colonne, oltre al "14" realizzo anche dei "13"? Quanti?

Soluzione: "basterebbe" giocare 3^{14} = 4 782 969 colonne, tante quante sono le possibili sequenze di 14 simboli scelti tra i 3 simboli 1, 2, X (ma il Lotto permette di giocarne al massimo 8192). Per capire bene il meccanismo, proviamo a vedere che cosa succede se vogliamo elencare tutte le sequenze di solo 4 simboli, scelti tra 3: ci sono 3 modi di scegliere il primo elemento nella sequenza, 3 (non dipendenti dalla scelta precedente) di scegliere il secondo, 3 (ancora non dipendenti dalle due precedenti) di scegliere il terzo ed infine 3 modi di scegliere il quarto: in totale $3\times3\times3\times3=3^4$. Quando la sequenza è lunga 14 bisogna iterare il procedimento. La "schedina" con le 3^{14} colonne diverse contiene anche 28 colonne errate solo per una posizione (cioè "13"): infatti l'errore in ognuna delle 14 posizioni può essere realizzato in 2 modi diversi.

4. (**Gelati 1**) Una gelateria vende gelati di nove gusti differenti. Un gruppo di ragazzi entra in negozio e ognuno compra un cono gelato da due gusti: nessuno di essi sceglie la stessa combinazione di gusti e nessuna combinazione di gusti viene scartata. Quanti sono i ragazzi?

4 bis. (**Gelati 2**) Come cambia la risposta, se supponete che ciascun ragazzo compri un cono a 3 gusti (oppure a 7 gusti) e, come prima, che nessuno di essi scelga la stessa combinazione di gusti e nessuna combinazione di gusti venga scartata?

Soluzione (**Gelati 1**): 36. Ogni combinazione di gusti viene scelta una e una sola volta: quindi i ragazzi sono tanti quante le possibili *combinazioni* di 9 gusti a due a due distinti. È chiaro che posso scegliere il primo gusto in 9 modi diversi e, una volta fatta la prima scelta, posso scegliere il secondo gusto in 8 modi diversi: totale 9×8 modi; ma questo non tiene conto del fatto che ad esempio un gelato limone e fragola è la stessa cosa di un gelato fragola e limone: dunque devo dividere per 2: quindi le possibili combinazioni di gelati sono **(9×8):2 = 36**.
(**Gelati 2**) Lo stesso discorso applicato al caso dei tre gusti porta a dire che ho 9×8×7 modi di scegliere i 3 gusti, ma in questo modo non tengo conto del fatto che posso elencare le parole "cioccolato, fragola e limone" in vari modi diversi. Quanti? Provate a prendere le lettere CFL e a permutarle in tutti i modi possibili: sono 6. Quindi i gelati distinti (e di conseguenza i ragazzi) sono **(9×8×7):6 = 84**. Ripetendo il ragionamento nel caso dei 7 gusti, vediamo che possiamo elencare i 7 gusti "bacio, cioccolato, fragola, limone, malaga, panna, stracciatella" in 2×3×4×5×6×7 modi diversi e quindi devo dividere il numero 9×8×7×6×5×4×3 di possibili scelte di 7 gusti per il numero di modi in cui posso elencarli. Ottengo: **(9×8×7×6×5×4×3):(7×6×5×4×3×2) = (9×8):2 = 36**, cioè lo stesso di quando combinavamo (9-7) gusti. Perché?

I nomi delle cose. Gli oggetti matematici (liste ordinate o non ordinate) di cui abbiamo calcolato il numero
- nel gioco 1: si chiamano *permutazioni* (*di 4 oggetti* nel caso in esame)
- nel gioco 3: si chiamano *disposizioni con ripetizione* (*di 3 oggetti a 13 a 13* nel caso in esame)
- nel gioco 4: si chiamano *combinazioni* (*di 9 oggetti a 2 a 2* nel caso in esame)

0. (Compleanni) Ognuno di voi pensi a 2 persone non presenti in quest'aula (ad esempio i genitori) e scriva su un foglietto la loro data di nascita e la propria. Scommettiamo che tra tutte le persone elencate sui vostri foglietti almeno due compiono gli anni nello stesso giorno? Posso essere quasi certo di vincere/perdere la scommessa?

Soluzione.[1] Supponiamo per semplicità che non ci siano anni bisestili: ognuno dei nostri personaggi può essere nato in uno dei 365 giorni dell'anno e quindi (vedi gioco 3) le sequenze possibili delle loro date di nascita sono in totale 365^n, ove n è il numero di persone che abbiamo elencato (se siete presenti in 15, sarà $n = 45$).
Nota la data di nascita del primo, il secondo o è nato nello stesso giorno oppure in uno degli altri 364 giorni; il terzo o è nato nella stessa data del primo o del secondo, oppure in uno degli altri 363 giorni ……
In totale quindi su 365^n casi possibili quelli con date tutte distinte sono

$$365\times364\times363\times\ldots\times[365-(n-1)]$$

e di conseguenza quelle in cui almeno due date sono coincidenti sono

$$365^n - 365\times364\times363\times\ldots\times[365-(n-1)]:$$

cioè il rapporto tra i casi favorevoli e i 365^n casi possibili è

$$P = \{365^n - 365\times364\times363\times\ldots\times[365-(n-1)]\}/365^n = 1 - \{365\times364\times363\times\ldots\times[365-(n-1)]\}/365^n$$

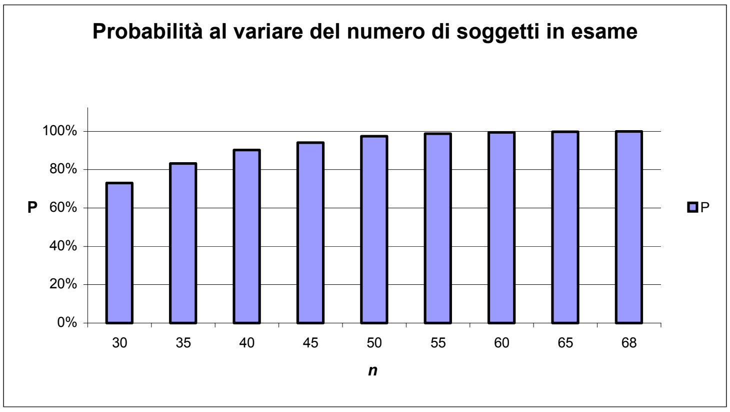
Sostituendo, ad esempio $n = 5$ si trova

$$P = 1 - [364\times363\times362\times361] / 365^4 = 1 - 0{,}973 = 0{,}027 = 2{,}7\%.$$

[1] Nell'incontro in classe, i giochi 1, 3, 4 vi sono stati proposti proprio per aiutarvi a trovare la spiegazione: eventualmente, prima di leggere le motivazioni che seguono, tornate a quei giochi

Ma basta aumentare a 30 il numero di personaggi perché i casi favorevoli diventino ragionevolmente numerosi e intorno alla sessantina si ha la quasi certezza che di vincere la scommessa, come si vede dalla tabella riportata qui sotto e successivo grafico:

n	30	35	40	45	50	55	60	65	68
P	73%	83,2%	90,3%	94,1%	97,4%	98,8%	99,5%	99,8%	99,9%



Un approfondimento sul gioco dei compleanni

Abbiamo visto che, considerando *n* date di nascita, il rapporto tra i casi in cui almeno due date coincidono e i 365^n casi possibili è

$$P_n = 1 - \{365\times364\times363\times\ldots\times[365-(n-1)]\}/365^n$$

e quindi se n=45

$$P_{45} = 1 - (365\times364\times363\times\ldots\times 321)/365^{45}$$

Abbiamo detto che P_{45} vale circa 94,1%, cioè 0,941: come è possibile che il sottraendo più piccolo di 0,06? Perché è il prodotto di numeri non maggiori di 1.
In effetti, usando Mathematica con il programmino scritto qui sotto

In[1]:= prod=1; Table[prod=prod*(365-i)/365.,{i,0,44}];prod

(che equivale a chiedere di fare il prodotto di 1 successivamente per: 364/365, 363/365, 362/365, … e così via fino a 321/365) si trova:

Out[1]=0.0590241

e usando solo una parte del programmino

In[2]:= prod=1; Table[prod=prod*(365-i)/365.,{i,0,44}]

si può anche leggere l'effetto delle moltiplicazioni successive, approssimate alla sesta cifra decimale (per numeri che, è bene sottolineare, dal secondo in poi, sono tutti più piccoli di 1):

Out[2]=

```
{1,          0.99726,    0.991796,   0.983644,   0.972864,
 0.959538,   0.943764,   0.925665,   0.905376,   0.883052,
 0.858859,   0.832975,   0.80559,    0.776897,   0.747099,
 0.716396,   0.684992,   0.653089,   0.620881,   0.588562,
 0.556312,   0.524305,   0.492703,   0.461656,   0.4313,
 0.401759,   0.373141,   0.345539,   0.319031,   0.293684,
 0.269545,   0.246652,   0.225028,   0.204683,   0.185617,
 0.167818,   0.151266,   0.135932,   0.12178,    0.108768,
 0.0968484,  0.0859695,  0.0760771,  0.0671146,  0.0590241}
```

In particolare sull'ultimo numero a destra della sesta riga (evidenziato) si legge l'effetto delle prime 30 moltiplicazioni (equivalenti a considerare solo 30 personaggi) e analogamente sui numeri che stanno sull'ultima colonna sotto a questo si legge l'effetto delle prime 35, 40, 45 moltiplicazioni: tenendo conto di ciò si può compilare almeno una parte della tabella riportata nelle soluzioni.

Giochi di complemento

squadra	vittorie	pareggi	sconfitte
A	0		
B	1		1
C		3	

1. (**Calcio**) Ad un torneo di calcio all'italiana a doppio turno hanno partecipato tre squadre A, B, C (giocando quindi ognuna due partite con ciascuna delle rimanenti). Quella a fianco è una tabella, compilata solo parzialmente, dei risultati che si sono verificati. Completate la tabella nell'unico modo possibile, indicando il procedimento seguito.

Soluzione. Sono stati giocati 4 incontri. Della squadra B si sa quante volte ha vinto e quante ha perso: dunque ha pareggiato 2 volte. B è stata sconfitta una volta da C (visto che A non ha vinto mai) che ha quindi una vittoria e tre pareggi. La squadra A è stata sconfitta una volta da B (infatti l'unica vittoria di C è stata realizzata con B) e ha pareggiato gli altri 3 incontri.

squadra	vittorie	pareggi	sconfitte
A	0	3	1
B	1	2	1
C	1	3	0

2. (**Esagono**) Considerate un esagono regolare P.
a) Quanti sono complessivamente i suoi lati e le sue diagonali?
b) Considerate tutti i triangoli i cui vertici sono vertici di P (e i cui lati sono lati o diagonali di P): quanti sono?
c) Se avete a disposizione due colori (rosso e blu) per colorare i lati e le diagonali di P (i vertici possono essere soggetti a doppia colorazione), in quanti modi diversi potete colorare i lati e le diagonali di P? (pensate l'esagono fisso).

Soluzione: a) Da ogni vertice partono 5 tra lati e diagonali: in tutto 15 segmenti, visto che ogni segmento è condiviso da due vertici.
b) I triangoli i cui vertici sono vertici di P sono quanti i modi di prendere i vertici dell'esagono a 3 a 3: (6×5×4):(2×3)= 20.
c) Ogni segmento può essere colorato in 2 modi diversi e quindi in totale ci sono 2^{15} = 32.768 colorazioni distinte.

3. (**Pallacanestro**) Dieci ragazzi vogliono giocare a pallacanestro. In quanti modi diversi è possibile formare le due squadre (5 ragazzi ciascuna), tenendo conto che Matteo vuole giocare con Stefano e che Beppe non vuole giocare con Andrea? (Tutti i ragazzi hanno nomi diversi fra loro.)

Soluzione: 30. Denotiamo Matteo, Stefano, Andrea e Beppe con le iniziali dei loro nomi. Visto che A e B vogliono stare in squadre diverse, denotiamo ognuna delle due squadre con la loro iniziale. Se MS fanno parte della squadra A, gli altri due componenti della squadra possono essere scelti, tra i restanti 6, in (6×5):2 modi (si divide per 2 poiché è indifferente se X e Y entrano a far parte della squadra in quest'ordine o nell'ordine inverso: anche in questo gioco, come in quello dei gelati, si considerano le *combinazioni* di 6 elementi a 2 a 2). Analogamente se MS fanno parte della squadra B. Quindi sommando si arriva a 30 modi di formare le squadre.

4. (**Estrazioni**) In un'urna vi sono 17 palline numerate da 1 a 17. Avete la possibilità di effettuare un'unica estrazione di un numero di palline a vostra scelta. Volendo essere certi che, fra le palline che estraete, ve ne siano almeno due la somma dei cui numeri sia 18, quante ne dovete estrarre?

Soluzione: 10. Vi sono 8 coppie non ordinate di interi fra 1 e 17 che sommati danno 18, e questi interi sono tutti diversi fra loro, dunque sono 16 in tutto. Se si estraggono 9 numeri, può accadere che uno sia 9 e che di ognuna delle coppie che sommate danno 18 sia presente un solo numero. Estraendone 10 invece, necessariamente fra questi si devono ritrovare entrambi gli interi di una coppia di cui sopra.

4. (**Cartoncini**) Maria ha 6 cartoncini di colore diverso, su ciascuno dei quali è segnato un numero naturale. Sceglie tre cartoncini e calcola la somma dei numeri corrispondenti. Dopo aver fatto questa operazione in tutti i 20 modi possibili, scopre che in 10 casi ha ottenuto 16, e negli altri ha ottenuto 18. Quanto vale il più piccolo dei numeri segnati sui cartoncini?

Soluzione: 4. Il punteggio complessivo ottenuto con le venti scelte è $16\times10+18\times10=340$. D'altra parte ogni cartoncino viene contato 10 volte (poiché, pensandolo come primo cartoncino, ci sono 10 modi per scegliere gli altri due tra i restanti 5): quindi la somma dei valori dei cartoncini è 34. Si sa che tre di questi cartoncini comunque scelti hanno somma che non supera 18. Supponiamo che ci sia un 1 tra i numeri segnati sui cartoncini: la somma dei rimanenti 5 numeri deve dare 33 e quindi ci saranno almeno 3 cartoncini la cui somma è maggiore di 18 (ad es. 21 come succede scomponendo così

$$33=6+6+7+7+7=6+6+6+7+8=6+6+6+6+9).$$

In modo analogo si vede che non ci può essere un 2 o un 3.

Invece ci può essere un 4, visto che $34=4+6+6+6+6+6$: e tra l'altro si vede che, se i cartoncini hanno questi valori, in metà dei casi 3 cartoncini hanno somma 16 e nell'altra metà hanno somma 18.

D'altra parte è chiaro che il più piccolo numero segnato sui cartoncini non può essere 6 (la somma di tutti i cartoncini darebbe almeno 36) e neppure 5 poiché è vero che $34=5+5+6+6+6+6$, ma in questo caso si avrebbero anche estrazioni in cui il punteggio è 17.

Soluzioni dei Giochi Logici (Incontro N° 3)

1. (**Età**) Marco, che sta aggiornando sulla sua vita un amico che non vede da anni, gli dice: "Ho avuto tre figlie, nate tutte in maggio; il prodotto delle loro età è 36 e la somma delle loro età è il numero che vedi su quella casa gialla lì all'angolo. Indovina: quanti anni ha ciascuna?". L'amico riflette un attimo e dice: "Veramente mi manca un dato". E l'altro subito aggiunge: "È vero, dimenticavo di dire che la più grande ha gli occhi azzurri". A quel punto l'amico dice le tre età esatte. Quanti anni hanno le tre figlie di Marco?

   Soluzione. Le età potrebbero essere: 1,1,36 oppure 1,2,18 oppure 1,3,12 oppure 1,4,9, oppure 1,6,6, oppure 2,3,6 oppure 2,2,9, oppure 3,3,4. Se conoscendo la somma delle età non posso stabilire in quale di questi casi sono, significa che la somma delle età è condivisa da almeno due situazioni e quindi è 13 (=1+6+6=2+2+9) e l'indicazione che esista una figlia maggiore delle altre porta a concludere che le età sono 2,2,9.

2. (**Biscotti**) Sei bambini hanno mangiato insieme complessivamente 20 biscotti. Andrea ne ha mangiato uno, Beatrice due e Clelia tre. Daniela ha mangiato più biscotti di ognuno degli altri bambini. Qual è il più piccolo numero di biscotti che può aver mangiato Daniela?

   Soluzione: 6. Complessivamente, Daniela e i due rimanenti bambini non nominati hanno mangiato 20-6=14 biscotti. Volendo esprimere 14 come somma di 3 addendi interi non negativi, almeno uno di essi deve valere almeno 5. Ma se ce n'è uno che vale esattamente 5, deve essercene anche un altro non più piccolo di lui. Se invece ce n'è uno che vale 6, c'è la possibilità che entrambi gli altri due siano più piccoli (4+4 o 5+3).

3. (**Vicini**) Bruno, Claudio, Luca, Marco e Paolo siedono in cerchio e, per ognuno di loro, la distanza dal vicino di sinistra è diversa da quella dal vicino di destra.
   L'insegnante chiede a ciascuno di dire il nome del ragazzo che gli siede più vicino. Bruno e Claudio vengono nominati due volte ciascuno, Luca una volta sola. Allora
   A) certamente Bruno e Claudio non sono vicini
   B) certamente Marco e Paolo non sono vicini
   C) Marco e Paolo sono vicini
   D) la situazione descritta è impossibile

   Soluzione: (C). Denotiamo ogni ragazzo con l'iniziale del nome.
   A) è falsa poiché se ci fosse un ragazzo tra B e C dovrebbe essere più vicino ad uno dei due: di conseguenza l'altro sarebbe chiamato da un solo vicino
   B) è falsa poiché è vera la C)
   C) è vera poiché se ci fosse un ragazzo tra M e P uno dei due sarebbe chiamato almeno una volta
   D) è falsa: basta che i ragazzi siano nell'ordine B, C, M, P, L, con distanze tali, ad esempio, che CM=2BC, MP=5BC, PL=4BC, BL=3BC.

4. (**Due porte**) Due porte adiacenti, di cui una conduce alla vita e l'altra alla morte, sono costantemente vigilate da un solo guardiano; ma, dei due guardiani che si alternano casualmente in questo lavoro, uno dice sempre la verità e uno mente sempre. Quale domanda posso porre al guardiano che incontro per individuare con certezza la porta della vita?

   Soluzione. "Quale porta mi indicherebbe il tuo collega quale porta della vita?" e poi prendo l'altra porta. Infatti se il guardiano interpellato è il veritiero mi indicherà come risposta del collega la porta della morte, se invece è il mendace mi indicherà la porta che il veritiero non mi avrebbe indicato, cioè ancora la porta della morte.

5. (**Alternanze**) Paolo è un tipo strano: in ogni singolo giorno o mente sempre o dice sempre la verità, alternando il suo comportamento al variare dei giorni. Oggi egli ha fatto 4 delle seguenti 5 affermazioni. Quale non può avere fatto?
A) Il numero dei miei amici (maschi e femmine) è un numero primo.
B) I miei amici sono tanti quante le mie amiche.
C) Io mi chiamo Paolo.
D) Io dico la verità in tutti i giorni della mia vita.
E) Tra i miei amici e le mie amiche, tre sono più vecchi di me.

Soluzione: (C). Infatti C è un'affermazione vera, D è falsa: quindi, a seconda della giornata, Paolo non può dire una delle due. D'altre parte, le restanti frasi sono contradditorie (Paolo dice di avere almeno tre amici (E), di avere un numero primo di amici (A) e quindi un numero dispari di amici, poiché ne ha più di 2 che sarebbe l'unico pari primo, e di avere un ugual numero di amici e di amiche (B) e quindi un numero pari di amici di ambo i sessi). Dunque non è in giornata di verità.

6. (**Logici**) Un logico intende mettere alla prova tre suoi illustri colleghi con un gioco di intelligenza. Conduce i tre in una stanza priva di finestre e superficie riflettenti e, dopo averli fatti sedere in modo che ognuno veda gli altri due, spiega: "Dopo aver spento la luce metterò in testa a ciascuno di voi uno di questi cappelli, dei quali come vedete tre sono neri e due bianchi. Appena riaccenderò la luce, dovrete dirmi il colore del cappello che indossate (senza poter vedere quelli avanzati) deducendolo con un ragionamento logico". Torna la luce e i tre hanno un lungo momento di esitazione; poi esclamano all'unisono: "io ho in testa un cappello nero". Come sono arrivati a questa deduzione?

Soluzione. Il lungo momento di esitazione dice che tutti e tre non hanno motivo di certezza: tutti vedono almeno un cappello nero ed in particolare quindi non sono presenti due cappelli bianchi. Ora, se il cappello di A fosse bianco, quello di B nero e quello di C nero, A non potrebbe decidere mentre B e C saprebbero di poter avere l'unico altro cappello bianco. B potrebbe però ragionare così: "se avessi il secondo cappello bianco, C avrebbe detto subito di avere il cappello nero" e similmente potrebbe ragionare C: quindi B e C potrebbero dedurre prima di A di avere un cappello nero. Quindi visto che la risposta è simultanea nessuno può indossare un cappello bianco.

Esercizi di complemento

7. (**Animali**) Fabio, Giulia, Mauro e Nadia possiedono ciascuno un solo animale**.** I loro animali sono un cane, un canarino, un gatto e un pesce rosso. L'animale di Mauro ha il pelo; quello di Fabio ha 4 zampe; Nadia ha un uccellino e sia Giulia sia Mauro non possiedono gatti. Quale delle seguenti affermazioni è falsa?
A. Fabio ha un cane B. Nadia ha un canarino C. Giulia ha un pesce
D. Fabio ha un gatto E. Mauro ha un cane

Soluzione. (A). Poiché Mauro ha un animale col pelo che non è un gatto, ha un cane: dunque Fabio non può avere un cane.

8. (**Libri**) Tutti i 50 libri in uno scaffale di una libreria sono di matematica o di fisica. Sappiamo che non ci sono due libri di fisica uno accanto all'altro e che ogni libro di matematica ha un altro libro di matematica accanto. Quale fra queste conclusioni può essere falsa?
A) Ci sono tre libri di matematica consecutivi, cioè non intervallati da libri di fisica.
B) Il numero dei libri di matematica è almeno 32.
C) Il numero dei libri di fisica è al massimo 17.
D) Se il numero dei libri di fisica è 17 allora uno di loro sta al primo o all'ultimo posto dello scaffale.
E) Presi 9 libri situati in modo consecutivo, almeno 6 fra questi sono di matematica.

Soluzione: (A). La legge con cui sono distribuiti i libri sullo scaffale è che tra due libri consecutivi di fisica ci siano almeno due libri di matematica. Allora (A) è falsa poiché se ci sono 34 libri di matematica lo scaffale può cominciare e finire con 2 libri di matematica, presentando, alternati, dopo i primi 2, un libro di fisica e 2 di matematica.
Verifichiamo, per completezza, che ognuna delle rimanenti affermazioni è vera.
(B) è vera: se ci fossero meno di 32 libri di matematica (o anche 32 esattamente) ce ne sarebbero 18 o più di fisica e i 17 o più posti tra due di essi non potrebbero essere riempiti tutti da coppie di libri di matematica.
(C) è vera: il ragionamento precedente ci convince che non ci possono essere più di 17 libri di fisica. Se sono esattamente 17, vedi (D).
(D) è vera: se i libri di fisica sono 17, quelli di matematica sono 33: non è quindi possibile riprodurre la situazione descritta in (C) poiché non c'è un numero di libri di matematica sufficiente ad isolare i libri di fisica (ne servirebbero 18x2): anzi, visto che non ci possono essere libri di matematica isolati, lo scaffale deve iniziare e finire con libri di fisica (e ci sono 2 libri di fisica tra cui sono racchiusi 3 libri di matematica).
(E) è vera: la situazione in cui si presentano meno libri di matematica è quella in cui si susseguono 1 libro di fisica e 2 di matematica (vedi (D)): prendendo 9 libri in una sequenza di questo genere se ne trovano sempre 3 di fisica e 6, variamente disposti, di matematica.

9. (**Cognomi**) Ci sono 4 persone i cui cognomi sono Bianchi, Neri, Rossi e Verdi.
Bianchi dice: "Rossi, Neri e Verdi sono ragazze."
Rossi dice: " Bianchi, Neri e Verdi sono ragazzi."
Neri dice: "Bianchi e Rossi mentono."
Verdi dice: "Bianchi, Rossi e Neri dicono la verità."
Quanti hanno detto la verità?
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Non si può determinare.

Soluzione: (B). L'affermazione di Verdi è chiaramente falsa: se infatti fosse vera, allora Bianchi, Rossi e Neri direbbero la verità e ciò è incompatibile. Se Neri dice la verità allora sarebbe l'unico a dirla. Se invece Neri dice una affermazione falsa significa che Bianchi o Rossi stanno dicendo la verità, però non entrambi dato che le loro due asserzioni sono incompatibili. In ogni caso possiamo concludere che uno ed uno solo fra i 4 ragazzi sta dicendo la verità, anche se non siamo in grado di stabilire se sia Bianchi, Rossi oppure Neri.

10. (**Canguri**) Nel recinto c'era più di un canguro. Un canguro disse: "Siamo in 6" e saltò fuori dal recinto. Allo scadere di ogni minuto successivo, un canguro saltò fuori dal recinto dicendo: "Tutti quelli che sono saltati fuori prima di me hanno mentito", finché non ci furono più canguri nel recinto. Quanti canguri hanno detto la verità?

Soluzione: 1. Se il primo canguro ha detto la verità mentono tutti quelli che lo hanno seguito poiché hanno detto "Tutti quelli che sono saltati fuori prima di me hanno mentito". Se il primo canguro ha mentito, il secondo ha detto la verità, ma tutti gli altri hanno mentito. In entrambi i casi, uno solo ha detto la verità.

11. (**Regalo**) La mamma vuol sapere chi dei suoi 4 figli ha nascosto il regalo per il compleanno del papà. Essi fanno le seguenti affermazioni:
Aldo: "non sono stato io" Bruno: "non sono stato io"
Claudio: "è stato Dino" Dino: "è stato Bruno"
Se tutti tranne uno hanno detto la verità, chi ha mentito?
A. Aldo B. Bruno C. Claudio D. Dino E. non si può stabilire con certezza.

Soluzione: (D). Bruno e Dino fanno affermazioni che non possono essere entrambe vere: quindi uno dei due mente. Lo stesso succede per Claudio e Dino: se uno solo dei 4 ragazzi (e quindi in particolare di questi 3) mente, deve essere Dino.

Soluzioni dei "Giochi Classici" (Incontro N^o 4)

1. (**Cammelli**) Nel testamento di un cammelliere è previsto che i suoi cammelli vadano ai suoi 3 figli solo se essi riusciranno a ripartirseli in modo che al primo ne tocchino la metà esatta, al secondo un terzo esatto e all'ultimo 1/9 esatto. Come possono fare se alla morte del padre i cammelli sono 17 (e i cammelli sono preziosi solo se vivi)?

   Soluzione. In realtà questo è un tiro mancino del defunto: 1/2+1/3+1/9 = 17/18 è minore di 1 e quindi il patrimonio non potrebbe essere interamente suddiviso. Inoltre 17 non è divisibile per alcuno dei numeri 2, 3, 9; ma per fortuna 18 sì. L'esecutore testamentario prende in prestito un cammello, in modo da averne 18 e poi dà al maggiore 18:2=9 cammelli, al secondo 18:3=6 e al terzo 18:9=2 e infine rende il cammello preso a prestito.

2. (**Botti**) Tre soci costretti a chiudere il loro negozio vogliono dividersi equamente le 21 botti di vino restate in cantina, di cui 7 vuote, 7 piene e 7 piene per metà. Come fare senza versare neppure una goccia di vino, perché a ciascuno tocchi la stessa quantità di botti e di vino?

   Soluzione. In totale i tre soci si devono spartire 21 botti ed una quantità di vino pari a 10,5 botti; quindi a ogni socio toccano 7 botti ed una quantità di vino pari 3,5 botti. Ciò si può realizzare solo ripartendo l'insieme delle botti "piene per metà" in sottoinsiemi formati da un numero dispari di botti: (1,3,3) oppure (1,1,5). Corrispondentemente entrambi gli insiemi delle botti piene e di quelle vuote devono essere ripartiti secondo la partizione (3,2,2) o, nel secondo caso, (3,3,1). Per ciascuna di queste due soluzioni ci sono tre varianti, legate al fatto che si scelga come socio cui dare 1 sola botte "piena per metà" (rispettivamente 5 botti "piene per metà") il primo, piuttosto che il secondo o il terzo (rispettivamente: il terzo piuttosto che il primo o il secondo).

3. (**Formaggette**) Due pastori hanno portato con sé rispettivamente 5 e 3 formaggette di ugual valore: li incontra un contadino che chiede di mangiare con loro. I tre si ripartiscono ugualmente le formaggette e il contadino lascia in pagamento 24 uova. I due pastori vogliono spartirsi il contributo equamente: quante uova toccano a ciascuno dei due?

   Soluzione. Ciascuno dei tre ha consumato 2 formaggette e 2/3 e quindi il pastore che ha messo a disposizione 3 formaggette ha contribuito al pasto del contadino solo con 1/3 di formaggetta, cioè ha contribuito per 1/8 del pasto del contadino. Dunque al secondo pastore toccano (24: 8) = 3 uova, mentre al primo ne toccano 24 – 3 = 21.

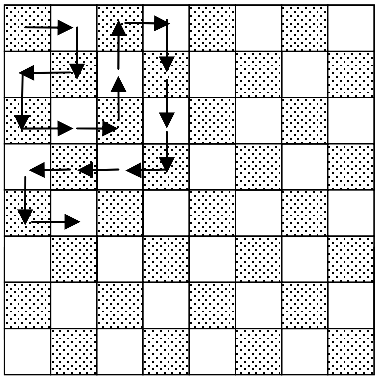
4. (**Leggenda degli scacchi**) Si narra che il gioco degli scacchi sia stato inventato in India da un bramino per il suo re e che questo ne fosse così entusiasta da promettergli qualunque ricompensa avesse desiderato. Il furbo bramino chiese solo "alcuni" semi di grano:
   1 per la prima casella della scacchiera
   2 per la seconda
   4 per la terza
   e così via raddoppiando fino alla 64-esima casella. Quanti semi avrebbe dovuto dargli il re?

   Soluzione. Si tratta di calcolare il valore della somma $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63}$.
   Ci sono vari modi per pervenire al risultato: incominciamo da quello che ci sembra più facilmente accessibile, poi ne diamo uno basato su un trucco e, per finire, la sua generalizzazione algebrica.

1° Calcolo) $x=1+2+2^2+2^3+2^4+ \ldots + 2^{63}$ può essere scritto in forma binaria come una sequenza di 64 uni: 1 … 11111. Sommando 1 a questo numero ed usando l'ordinaria nozione di riporto si ottiene

riporti		*1*	*…*	*1*	*1*	*1*	*1*		
		1	…	1	1	1	1	1	+
								1	=
	1	0	…	0	0	0	0	0	
posizione	65	64	…	5	4	2	2	1	

cioè $x+1=2^{64}$, vale a dire $x=2^{64} - 1$.



1° Calcolo, bis) Il ragionamento precedente può essere visualizzato usando la scacchiera.
Inserire le "pedine" con le etichette 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, …, 2^{63} nella scacchiera secondo lo schema indicato a fianco (nel materiale erano disponibili solo le etichette fino a 2^{15}, corrispondenti a riempire una griglia 4x4, sufficienti per capire il meccanismo e generalizzare).
Ogni casella ha il "valore" corrispondente a quello della pedina inserita all'inizio del gioco
Su ogni casella deve stare una sola pedina: quando se ne presentano due il valore del contenuto della casella scatta di 1 e quindi si deve rimuovere il contenuto di quella casella e aggiungere una pedina nella casella successiva nello schema.
"Prestiamo" una pedina di valore 1 alla prima casella e vediamo qual è la concatenazione degli eventi successivi (usare la MATTA per indicare di volta in volta la pedina che si aggiunge come riporto dalle somme precedenti).

2° Calcolo) Palesemente $x = (2 - 1)x = 2x - x$: applicando la proprietà distributiva si ha
$x = 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63}) - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63}) =$
$=2 + 2^2 + 2^3+ 2^4+ \ldots + 2^{63}+ 2^{64} - 1 - 2 - 2^2 - 2^3 - 2^4 - \ldots - 2^{63} = 2^{64} - 1$

3° Calcolo) È noto che $(q - 1)(q^{63} + q^{62} + \ldots + q^2 + q + 1)= q^{64} - 1$. Particolarizzare $q=2$.

La parte interessante del gioco, però non si esaurisce con questo conto. È opportuno arrivare a formarci un'immagine visiva di quanto è grande il numero $2^{64} - 1$.

Possiamo arrivarci per gradi.

a) se la scacchiera avesse avuto 4x4 caselle il re avrebbe dovuto fornire un numero di chicchi di grano pari a $2^{16} - 1 = 1024\text{x}2^6 - 1= 1024\text{x}64 - 1$ cioè circa 64000. Se 1000 chicchi pesano 50 grammi [(2)], sono circa 3,2 *kg* di frumento.
b) se la scacchiera avesse avuto 5x5 caselle il re avrebbe dovuto fornire $2^{25} - 1 =$ $=1024\text{x}1024\text{x}2^5 - 1= 1024\text{x}1024\text{x}32 - 1$ (cioè più di 32 000 000) chicchi di grano, ovvero più di 16 *quintali* di frumento.

[(2)] Quello che chiamiamo chicco è più propriamente una cariosside, vale a dire un frutto secco indeiscente (cioè che a maturità non si apre), tipico delle graminacee, con pericarpo (involucro di rivestimento) e seme strettamente uniti. Il peso di 1.000 cariossidi corrisponde a circa 35-50 g.
(*Fonte:* http://www.cialombardia.org/fattoriascuola/C-caratteristiche.htm)

c) se la scacchiera avesse avuto 6x6 caselle il re avrebbe dovuto fornire $2^{36} - 1 = 1024 \times 1024 \times 1024 \times 2^{6} - 1$ (cioè più di 64 000 000 000) chicchi di grano ovvero più di 3200 *tonnellate* di frumento.

d) se la scacchiera avesse avuto 7x7 caselle il re avrebbe dovuto fornire $2^{49} - 1 = 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 512 - 1$ (cioè più di 500 000 000 000 000) chicchi di grano ovvero più di 25 milioni di *tonnellate* di frumento.

e) Con la scacchiera 8x8, con gli stessi arrotondamenti [$2^{64} - 1$ = circa $16 \times (1000)^{6}$] [(3)] si perviene alla quantità di *800 000 milioni di tonnellate*.
NOTA BENE: la produzione *mondiale annua* di frumento è *oggi* (nonostante le coltivazioni intensive e le cure prestate alla produzione agricola) di poco superiore ai *600 milioni di tonnellate* quindi oltre 1000 volte inferiore [(4)].

5. (**Salti**) Un canguro fenomenale si sposta saltando in linea retta da Trieste a Mosca (le due città distano circa 2500 Km) e ogni salto è lungo il doppio del salto precedente. Se il primo salto è lungo 1 metro, dopo quanti salti il canguro sarà il più vicino possibile a Mosca?

Soluzione: dopo 21 salti. Infatti in base alla legge data, la lunghezza dell'*n*-esimo salto è 2^{n-1} metri. Sfruttando la formula che assegna la somma dei primi *n* termini della progressione geometrica di ragione *q*:

$$q^0 + q^1 + \ldots + q^{n-1} = (q^n - 1)/(q - 1),$$

(vedi *3° calcolo* del gioco precedente) si ottiene

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Poiché 2^{20} vale poco più di 1.000.000, dopo 21 salti il canguro avrà percorso poco più di 2.000 Km e quindi sarà più vicino a Mosca di quanto non sarebbe dopo 22 salti (corrispondenti a circa 4000 Km).

---

(3) Anzi un arrotondamento un po' meno grossolano dice che $2^{64} - 1$ è maggiore di $17 \times (1000)^{6}$.

(4) Si veda la tabella che segue. Per curiosità, la produzione annua italiana è intorno agli 8 milioni di tonnellate.

I dieci maggiori produttori di frumento nel 2005 (in milioni di tonnellate)	
Cina	96
India	72
Stati Uniti	57
Russia	46
Francia	37
Canada	26
Australia	24
Germania	24
Pakistan	22
Turchia	21
Totale mondiale	**626**
Fonte: UN Food & Agriculture Organisation (FAO)	

6. (**Monete**) Supponete, per comodità, che una moneta da 2 euro pesi 10 grammi. Avete davanti a voi 10 sacchetti di monete da due euro: ciascuno contiene dieci monete e proviene da un paese di Eurolandia diverso da quello da cui provengono tutti gli altri.
Vi hanno detto che uno dei sacchetti – ma non sapete quale – contiene in realtà 10 monete false, ciascuna delle quali pesa 9,9 grammi invece di 10. Come potete riconoscere il sacchetto di monete false, se avete a disposizione una bilancia elettronica con sensibilità fino ai decigrammi, ***ma potete fare una sola pesata*** (anche nel senso che non potete aggiungere o togliere sacchetti o monete dal piatto)?

Soluzione. Basta allineare i dieci sacchetti ed estrarre una moneta dal primo, due dal secondo, tre dal terzo ecc. e appoggiarle tutte insieme sulla bilancia. Se pesassero tutte 10 grammi, il peso totale sarebbe di $(1+2+3+\ldots+10)\times 10 = 550$ grammi. Invece le monete nel sacchetto incriminato (diciamo sia quello di posto k) pesano 9,9 grammi e quindi la pesata effettiva P sarà di $550 - 0{,}1k$. Allora $k=10 \times (550 - P)$.

Giochi di complemento

7. (**Scala mobile**) Il Signor Rossi impiega 90 secondi per portarsi al terzo piano di un grande magazzino salendo a piedi i gradini di una scala mobile quando questa non è in funzione; ne impiega invece 60 quando la scala è in funzione, ma si lascia trasportare senza muoversi. Quanti secondi impiega se la scala è in funzione e contemporaneamente egli ne sale i gradini?
A. 36 B. 75 C. 45 D. 30 E. 50

Soluzione: (A). La velocità della scala è una volta e mezza quella del Sig. Rossi quando sale a piedi. La somma delle due velocità è dunque due volte e mezza quella del Sig. Rossi. Allora il tempo impiegato è $(2/5)\times 90 = 36$ secondi.

8. (**Canone**) Tre cantanti devono cantare un canone formato da tre righe della stessa lunghezza e ognuno finisce quando ha cantato il pezzo 4 volte. Il secondo cantante inizia quando il primo cantante inizia la seconda riga e il terzo inizia quando il primo inizia la terza riga. Quale frazione del tempo totale del canto rappresenta il tempo in cui i tre cantanti cantano simultaneamente?

Soluzione: 5/7. Denotiamo con *A*, *B*, *C* le tre righe del canone. Dalla tabella

Cantante 1: *A B C A B C A B C A B C*
Cantante 2: *A B C A B C A B C A B C*
Cantante 3: *A B C A B C A B C A B C*

segue immediatamente che il rapporto fra il tempo in cui tutti e tre cantanti cantano insieme e il tempo totale vale 10/14=5/7.

9. (**Vacanze**) Siamo stati in vacanza a Londra per alcuni giorni. Durante la vacanza, è piovuto in 15 giorni diversi, ma:
- mattine piovose sono sempre state seguite da pomeriggi asciutti;
- pomeriggi piovosi sono sempre stati preceduti da mattine asciutte;
- le mattine asciutte sono state in tutto 12 e i pomeriggi asciutti sono stati in tutto 13.

Quanti giorni è durata la vacanza?

Soluzione: 20. Si può misurare la durata della nostra permanenza a Londra in termini di "mezze giornate" (mattinate o pomeriggi). In 15 giorni diversi è piovuto, ma ogni volta solo per mezza giornata come si scopre dalle prime due condizioni: quindi ci sono state 15 mezze giornate piovose. Inoltre ci sono state 13 + 12 = 25 mezze giornate asciutte. Quindi la vacanza è durata 15 + 25 mezze giornate cioè 20 giorni. Si noti che dai dati si deduce pure che il numero di giornate interamente asciutte è di (25 – 15)/2 = 5.